so, con las del Cabo, del Perú y con el gran arco de la India, halla:

Semi-eje mayor del ecuador	6378294^m
Semi-eje menor del ecuador	6376350
Semi-eje polar de la tierra	6356068

En cuanto á los meridianos máximo y mínimo, fija al primero la longitud de 15° 34′ al Este de Greenwich, posición que es casi la de Mesina; y al segundo la longitud de 74° 26′ al Oeste, la cual corresponde con poca diferencia á la de New-York en el hemisferio americano, y á la de Irkoutsk (Siberia), y de Singapore en el hemisferio asiático. Todos estos resultados manifiestan que, aun aceptando las conclusiones de Schubert y Clarke, es sumamente pequeña la diferencia que existe entre la forma que asignan á la tierra estos geómetras y la más sencilla de un elipsoide de revolución. Por consiguiente, puede tenerse por cierto que, sean cuales fueren los progresos futuros que se alcancen en cuanto á la asignación de la figura real de nuestro planeta, es indudable que en la mayor parte de las aplicaciones será suficientemente exacto suponerlo un elipsoide de revolución al derredor de su eje polar.

CAPITULO II.

INVESTIGACIÓN DE LA FORMA DE LA TIERRA POR MEDIO DEL PRINCIPIO DE LA GRAVITACIÓN.

106.—Por extensa que sea esta materia, y por numerosas que hayan sido las aplicaciones á que ha dado origen el fecundo principio de la gravitación universal para determinar la figura de la tierra, creo indispensable presentar una breve exposición de los principales procedimientos, para dar una idea de las investigaciones teóricas y de los métodos de experimentación directa que se han aplicado á aquel objeto.

Los principios de la Mecánica, aplicados á los fluidos y combinados con las propiedades características de éstos, han dado á conocer las condiciones que deben reunirse para que subsista el equilibrio en una masa fluida. Desde luego la presión que sufre un punto cualquiera de la masa en una dirección determinada, debiendo transmitirse en todos sentidos, es necesario que sea destruída por la resultante de las demás presiones que se ejerzan en el mismo punto. Si se designan por x, y, z las coordenadas de un punto de la masa fluida, referidas á tres planos rectangulares, y llamamos F la fuerza que produce la presión en ese punto, podremos descomponer ó resolver la fuerza F en otras tres X, Y, Z, dirigidas en el sentido de cada uno de los ejes, y siendo ρ la densidad del fluido, la primera condición matemática del equilibrio requiere que sea una diferencial exacta la expresión $\rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$, cuya integral representa la presión total que se ejerce en la unidad de superficie. [1]

Una vez satisfecha la condición anterior, si se desea hallar la forma de la masa fluida, es necesario atender á que si en su superficie externa se ejerciera una presión, no pudiendo el fluido oponer resistencia alguna en atención á la perfecta movilidad de sus moléculas, se destruiría el equilibrio; luego en el supuesto de que este exista, es preciso admitir que es nula la presión en la superficie. Así es que siendo x, y, z las coordenadas de un punto de la superficie externa de la masa, deberán satisfacer la ecuación:

$$X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

y la integral de ésta dará la ecuación de la superficie, ó sea la forma general de la masa fluida.

Admitamos en el globo terrestre un estado primitivo de fluidez, é investiguemos la forma que debió tomar en virtud de la rotación al derredor de su eje, y de la atracción que sufren sus moléculas en virtud de la gravedad, suponiendo que el centro de atracción coincide con el de la masa, ó lo que es lo mismo, que esa fuerza se ejerce en la dirección del radio. Dos fuerzas obrarán entonces en cada partícula de la tierra: la gravedad, que las atrae en razón inversa de los cuadrados de las distancias, y la fuerza centrífuga que tiende á alejarlas del eje de rotación. Para encontrar las componentes X, Y, Z, de estas fuerzas en las direcciones de los tres ejes, sean $CN=x, NP=y, PM=z$, (fig. 33ª) las coordenadas del punto M referidas á los ejes CA, CB y CD, que pasan por el centro C de atracción, y de los cuales el úl-

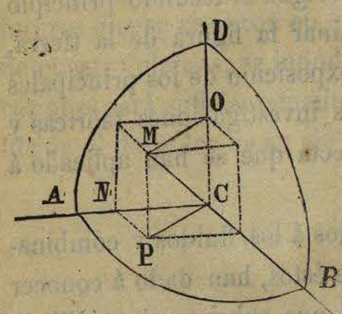

FIG. 33ª

[1] Puede verse el desarrollo de todas éstas consideraciones en cualquier tratado elemental de Mecánica analítica, y sobre todo en la excelente memoria publicada en la "*Enciclopedia Metropolitana*" con el título de "*Figure of the earth,*" por Mr. G. B. Airy, actual director del Observatorio de Greenwich.

timo supondré que es el eje de rotación. Designando por g la fuerza de atracción á la unidad de distancia, será $\frac{g}{r^2}$ á la distancia $CM=r$. Las tres componentes de esta fuerza serán respectivamente $\frac{gx}{r^3}$, $\frac{gy}{r^3}$ y $\frac{gz}{r^3}$, puesto que $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ y $\frac{z}{r}$ son los cosenos de los ángulos que forma su dirección con los ejes.

La fuerza centrífuga ejerce su acción en el plano MO, perpendicular al eje de rotación, y si designamos por f su intensidad á la unidad de distancia, será $f.MO=f.PC$ á la distancia $MO=PC$, puesto que es proporcional á las distancias al eje de rotación. Su componente en la dirección de CD es, por consiguiente, nula, y en las de los otros ejes, serán: fx y fy, por ser $\frac{x}{PC}$ é $\frac{y}{PC}$ los cosenos de los ángulos que con ellos forma la línea PC.

Teniendo presente que la gravedad tiende á disminuir, y la fuerza centrífuga á aumentar las coordenadas de M, tendremos que las componentes totales X, Y, Z, son:

$$X = -g\frac{x}{r^3} + fx$$

$$Y = -g\frac{y}{r^3} + fy$$

$$Z = -g\frac{z}{r^3}$$

Sustituyendo estos valores en la condición (1), se obtendrá:

$$-\frac{g}{r^3}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z) + f(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = 0$$

Para ejecutar la integración notemos que la distancia r está ligada con las coordenadas por la relación $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, de la que se obtiene:

$$r\mathrm{d}r = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$$

Tenemos también $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}.(x^2 + y^2)$, y, en consecuencia, resultará por la sustitución:

$$-\frac{g\,\mathrm{d}r}{r^2} + \frac{1}{2}f.d(x^2+y^2) = 0$$

Integrando, y designando por C la constante, resulta:

$$\frac{g}{r} + \frac{1}{2} f(x^2+y^2) = C$$

Para determinar la constante, llamenos a el radio ecuatorial, y atendiendo á que entonces $x^2+y^2=a^2$, tendremos:

$$C = \frac{g}{a} + \frac{1}{2} f a^2$$

por lo cual la ecuación general de la superficie del globo, será:

$$\frac{g}{r} + \frac{1}{2} f(x^2+y^2) = \frac{g}{a} + \frac{1}{2} f a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

La fuerza centrífuga en el ecuador es fa, y como sin la existencia de ésta sería $\frac{g}{a^2}$ la atracción, se deduce que la resultante de ambas fuerzas, ó la gravedad que realmente tiene lugar en el ecuador, es: $\frac{g}{a^2} - fa$. Si designamos por p la relación entre la fuerza centrífuga y la pesantez ecuatoriales, tendremos:

$$p = \frac{fa}{\frac{g}{a^2} - fa}$$

de lo que resulta:

$$f = \frac{pg}{(1+p)a^3}$$

Con este valor la ecuación (2) tendrá la forma:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{p}{2(1+p)a} - \frac{p(x^2+y^2)}{2(1+p)a^3}$$

que se convierte con facilidad en la siguiente:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \cdot \frac{2+3p}{2+2p} - \frac{p(x^2+y^2)}{2(1+p)a^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Esta ecuación daría el valor de un radio cualquiera r asignando determinados valores á las coordenadas, puesto que se tiene la relación: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Así, por ejemplo, para $x=0$, $y=0$, $z=b$, se tendrá para el radio polar ó semi-eje de rotación:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{2+3p}{2+2p}$$

ó bien:

$$b = a\frac{2+2p}{2+3p}$$

Se ve desde luego, por la forma de esta expresión, que el eje polar es menor que el ecuatorial, lo cual indica la figura aplanada de la tierra. El valor de la compresión sería:

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{2+2p}{2+3p} = \frac{p}{2+3p}$$

La relación de la fuerza centrífuga á la pesantez en el ecuador es $p=\frac{1}{289}$, y así sustituyendo se hallará: $\alpha=\frac{1}{581}$.

107.—El valor de este aplanamiento es notablemente menor que el que se ha obtenido por las observaciones del péndulo y por las medidas geodésicas; pero también no es estricta la hipótesis que sirvió de base para el cálculo precedente, cual es la de que la dirección de la pesantez coincida con la del radio central. A la verdad, para asignar la verdadera dirección de la gravedad sería necesario conocer la forma de la tierra, que es el elemento final del problema; y aunque creo que tal vez podría resolverse por aproximaciones sucesivas partiendo de la figura que va resultando de cada resolución, los geómetras que se han ocupado en este asunto siguen un método sintético más breve, como es el demostrar que el elipsoide satisface las condiciones matemáticas del equilibrio. Por otra parte, los elementos relativos á la densidad y demás circunstancias del interior de nuestro planeta, no siendo exactamente conocidas, tienen que suplirse con hipótesis más ó menos fundadas; pero que, por la misma razón, dan resultados algo diferentes de los que han podido obtenerse hasta hoy por la experimentación directa.

Los expuesto basta para el objeto de dar una idea de este género de investigaciones, que no creo necesario desarrollar en su totalidad, limitándome á remitir al lector que desee ejercitarse en ellas á la obra de Mr. Airy de que antes hice mención.

108.—Expliquemos ahora brevemente el fundamento y la práctica de las observaciones del péndulo, que, como dije en otra parte, constituyen otro de los métodos que se aplican también á la determinación de la forma de la tierra. Se sabe que el tiempo que dura la oscilación del péndulo *simple*, cuya longitud sea l, tiene por expresión:

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

la cual indica que la duración de las oscilaciones de un mismo péndulo es inversamente proporcional á la raíz de la intensidad g de la pesantez. De aquí se deduce que si se transporta el péndulo á dos ó más estaciones, y en cada una de ellas se cuentan los números n y n' de oscilaciones que hace en un mismo tiempo T, tendremos que las duraciones de una sola oscilación serán:

$$\frac{T}{n}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \frac{T}{n'}=\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

de donde resulta:

$$\frac{g}{g'}=\frac{n^2}{n'^2}$$

Esta ecuación manifiesta que las intensidades de la gravedad en dos lugares del globo son proporcionales á los cuadrados de los números de oscilaciones del péndulo en un mismo espacio de tiempo, como una hora, un minuto, etc. Según esto, basta contar esos números sirviéndose, para medir el tiempo, de un buen reloj arreglado por medio de observaciones astronómicas, para obtener la relación $\frac{g}{g'}$, que, según veremos después, puede servir de elemento para determinar la compresión de la tierra.

La relación de las gravedades puede hallarse también calculando la longitud del péndulo simple que en cada estación oscila en el mismo tiempo, por ejemplo, en un segundo de tiempo medio. Para esto es necesario medir cuidadosamente la longitud l de un péndulo

simple cualquiera, que haga su oscilación en el tiempo t en un lugar determinado, pues llamando x la longitud del péndulo incógnito, se tienen las ecuaciones:

$$t^2=\pi^2\frac{l}{g} \qquad 1=\pi^2\frac{x}{g}$$

de cuya combinación resulta:

$$x=\frac{l}{t^2}$$

Supongamos que se hubiera observado en México que un péndulo simple de $2^m.231$ de largo hace 40 oscilaciones en un minuto de tiempo medio. La duración de cada oscilación sería, por consiguiente: $t=1^s.5$; y para la longitud del péndulo que oscilaría en 1^s tendríamos:

$$x=\frac{2^m.231}{2\ .25}=0^m.9916$$

Conociendo de esta manera los péndulos que marcan segundos en dos lugares, se tiene la ecuación:

$$1^s=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}$$

que indica que la relación de las intensidades de la pesantez es igual á la de las longitudes de los péndulos que oscilan en el mismo tiempo.

109.—La concepción del péndulo simple es puramente un artificio matemático irrealizable en la práctica, puesto que se supone ser formado por un punto material, colocado en la extremidad de un hilo inflexible é inextensible, y que oscila en el vacío en un arco infinitamente pequeño. Sin embargo, la Mecánica tiene medios para determinar el péndulo simple que oscilaría en el mismo tiempo que un péndulo real cualquiera; y por tanto, todas las consecuencias que hemos deducido de la ecuación (4) son ciertas, luego que por medio del cálculo se haya encontrado la longitud del péndulo ideal que corresponde á aquel de que se haga uso en las experiencias.

Desde luego, llamando 2θ el arco de oscilación, la verdadera duración de ésta es algo mayor que la correspondiente á un arco infinitamente pequeño, y tiene por expresión:

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \times \left(1 + \frac{1}{4}\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,\theta\right)$$

Como θ es generalmente de 1° ó 2° cuando más, puede expresarse en minutos, y haciendo $m = \frac{1}{16}\text{sen.}^2\,1'$, tendremos:

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \times (1 + m\theta^2) = t(1 + m\theta^2)$$

de donde resulta la duración de la oscilación del péndulo simple, siendo t' la observada con el instrumento real:

$$t = \frac{t'}{1 + m\theta^2}$$

Cuando la observación dura algún tiempo, y el arco de oscilación disminuye sensiblemente del principio al fin de la serie, se tomará por θ el término medio de los valores que corresponden al principio de la operación ó al término de ella.

Otra corrección que es preciso hacer á la duración de las oscilaciones proviene de la temperatura en el momento de la observación, pues dilatándose el péndulo, oscila con más lentitud que á 0° de temperatura. Sea c el coeficiente de dilatación del material del péndulo, l su longitud á 0° y τ la indicación del termómetro centesimal. La duración observada será:

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l(1 + c\tau)}{g}} = t\sqrt{1 + c\tau}$$

y atendiendo á la pequeñez de c se obtendrá desarrollando y despejando:

$$t = t'\left(1 - \frac{1}{2}\,c\,\tau\right)$$

Para reducir la duración de la oscilación, observada en el aire, á

lo que sería en el vacío, notemos que ese fluido hace perder al péndulo una parte de su peso, lo cual produce el mismo efecto que si disminuyese ligeramente la intensidad de la pesantez. Designando, pues, por g' la gravedad así modificada, la observación da este valor:

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l}{g'}} = t\sqrt{\frac{g}{g'}}$$

y por consiguiente, se obtendrá:

$$t = t'\sqrt{\frac{g'}{g}}$$

Para hallar una cantidad que equivalga al coeficiente de t', sean v y P respectivamente el volumen y la densidad del péndulo, y p la densidad del aire. Puesto que los valores de g y g' deben ser proporcionales á los pesos del péndulo en el vacío y en el aire, se tendrá:

$$\sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{\frac{v(P-p)}{vP}} = \sqrt{1 - \frac{p}{P}} = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{p}{P}$$

y el valor de t será en consecuencia:

$$t = t'\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{p}{P}\right)$$

Como la densidad del aire varía con la presión y la temperatura, su valor, cuando son b y τ las indicaciones del barómetro y del termómetro, tiene la forma:

$$p = \frac{0.001299\,b}{0.760(1 + a\tau)}$$

Sustituyendo en el valor de t se hallará finalmente:

$$t = t'\left(1 - \frac{0.00065\,b}{0.760\,P(1 + a\tau)}\right)$$

expresión en la que $a = 0.00367$, es el coeficiente de expansión de los gases.

Cuando las experiencias se hacen á cierta altura n sobre el nivel del mar, es preciso hacer otra pequeña corrección al valor de la pesantez á fin de reducir el tiempo de la oscilación á lo que sería al nivel del Océano, pues de otra manera no podrían ser comparables los resultados obtenidos en estaciones diversamente elevadas. Sea g' la gravedad en el lugar cuya altura es n, y g la que corresponde á la misma latitud al nivel del mar; como estas fuerzas son inversamente proporcionales á los cuadrados de las distancias, llamando R el radio terrestre, se tiene:

$$g'(R+n)^2 = gR^2$$

Habiendo suministrado la observación el valor de t', se tendrá como antes:

$$t = t'\sqrt{\frac{g'}{g}}$$

é introduciendo el valor de g' y desarrollando hasta el primer orden de n en atención á su pequeñez respecto del radio, hallaremos:

$$t = t'\left(\frac{R}{R+n}\right) = t'\left(1-\frac{n}{R}\right)$$

Tales son las principales correcciones que hay que hacer á la duración observada de una oscilación, para obtener la que correspondería al péndulo ideal llamado simple. Reuniéndolas en una sola expresión se tendrá:

$$t = t'\,\frac{\left(1-\frac{1}{2}c\tau\right)\left(1-\frac{0.00065\,b}{0.760\,P(1+a\tau)}\right)\left(1-\frac{n}{R}\right)}{1+m\theta^2} \;\;\ldots\ldots (5)$$

110.—Veamos ahora el modo de determinar la longitud l del péndulo que sirve para hacer las observaciones. Siendo éste más ó menos compuesto de formas geométricas, la distancia de su centro de oscilación al de suspensión, se calcula por las fórmulas que con ese objeto dan los tratados de Mecánica, á los cuales remitimos al lector, no siendo de este lugar el desarrollo de esas teorías. En las mismas obras, ó en las que tratan de algunos péndulos de construcción especial, como el de Kater y otros, pueden también verse los detalles necesarios para servirse de esos aparatos. No pudiendo aquí ocuparme de todos ellos, sólo haré una rápida descripción del de Borda, por ser uno de los más sencillos, y en consecuencia, el que se puede construir con más facilidad. Este instrumento se compone de una pequeña esfera de platina, cuyo peso es próximamente de 500 gramos, suspendida en la extremidad de un hilo metálico muy delgado. Este hilo está directamente unido á un casco esférico de latón, cuyo radio interior es precisamente igual al de la esfera de platina, de manera que ésta se aloja en aquél y se le adhiere poniendo en el primero una ligera capa de grasa. El objeto de independer la esfera del hilo es el de poder variar la colocación de la misma esfera, á fin de eliminar las pequeñas desigualdades de densidad que pudieran existir en ella. Se procura también que el hilo no sea de hierro, para evitar la influencia de alguna acción magnética.

El hilo se une en su parte superior á una pieza de suspensión que tiene la forma de un cuchillo, descansando por el filo en dos láminas de acero ó de ágata fijas con solidez en un muro. De este modo es muy pequeño el rozamiento, y se da, además, á la pieza de suspensión una figura y un peso tales que pueda oscilar casi en el mismo tiempo que el péndulo, á fin de que no modifique sensiblemente las oscilaciones de éste. En la parte inferior se traza un pequeño arco graduado, con un radio igual á la longitud del péndulo, con el objeto de anotar la amplitud $2\,\theta$ de la oscilación.

Para hacer uso de este ó de cualquier otro péndulo, no es indispensable contar todas las oscilaciones que hace en un tiempo dado, sino simplemente anotar las horas del péndulo ó reloj astronómico en que coinciden las oscilaciones de éste con las del de la experiencia. A este fin, debe tenerse presente que cada vez que coinciden las oscilaciones de ambos instrumentos hacia un mismo lado, á la derecha, por ejemplo, uno de ellos ha hecho dos oscilaciones más que el otro, de suerte que la diferencia de las horas de las coincidencias corresponde á n oscilaciones del péndulo astronómico y á $n \pm 2$ del de la experiencia. Es claro que deben tomarse las horas, minutos y segundos que señala el primer instrumento en cada coincidencia, y que la diferencia debe corregirse proporcionalmente á su adelanto ó atraso en 24^h de tiempo medio. Entonces puede calcularse el número de oscilaciones que hace el péndulo de la experiencia en 24^h ó en 86400^s, por la ecuación:

$$N = \frac{86400(n \pm 2)}{n};$$

y, por consiguiente, se determinará con facilidad la duración t' de cada una.

Para hallar la longitud l se mide exactamente la distancia de la parte inferior de la esfera al cuchillo de suspensión, anotando la temperatura para reducirla á 0°, ó sea para corregirla por la dilatación del hilo. Siendo Δ el resultado y r el radio de la esfera, $\Delta - r$ será la distancia del centro de ésta al eje de suspensión; pero como el centro de oscilación queda un poco más bajo que el de figura, se tiene:

$$l = \Delta - r + \frac{0.4\,r^2}{\Delta - r}$$

por distancia del cuchillo al centro de oscilación.

Bouguer y Lacondamine hicieron uso en el ecuador de un péndulo más sencillo aún que el de Borda, pues consistía simplemente en una hebra de pita unida á una pieza de suspensión, y en cuya extremidad inferior se fijaba un peso pequeño y de figura regular. Sin embargo, creo que la elasticidad de esa substancia y sus propiedades higrométricas pueden originar errores de importancia en la determinación del valor de l, que es necesario determinar con la mayor precisión, y que, en mi concepto, constituye la parte más delicada de las observaciones del péndulo.

Obtenida la longitud l y el tiempo t de la oscilación correspondiente al péndulo simple, puede ya calcularse el que oscilaría en 1^s por la fórmula $x = \frac{l}{t^2}$, que antes se ha establecido.

111.—La aplicación de las longitudes del péndulo de segundos á la determinación de la forma de la tierra está fundada en uno de los teoremas de Clairaut, de cuyas teorías se deduce que sea cual fuere la estructura interior de nuestro planeta, las intensidades de la pe-

santez deben crecer como los cuadrados de los senos de las latitudes. Como por otra parte, las longitudes de los péndulos que oscilan en el mismo tiempo son directamente proporcionales á las intensidades de la gravedad, según lo indica la expresión (4), se infiere que varían del ecuador al polo en la misma relación que éstas. De acuerdo con este principio, si se designa por A la longitud del péndulo simple de segundos en el ecuador, y por B una constante, indeterminada por lo pronto, tendremos que en una latitud cualquiera φ, la longitud del péndulo que oscila en un segundo, será de la forma:

$$l = A + B\,\text{sen.}^2\,\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Si, pues, como se ha explicado, se mide directamente el péndulo de segundos en el ecuador, y en seguida á otra latitud φ, no quedará más incógnita que B en la ecuación precedente, y por consiguiente, podrá determinarse. Además, como para $\varphi = 90°$, se tendría $l = A + B$, resulta que B es el incremento del péndulo del ecuador al polo, el cual medirá el incremento correspondiente de la pesantez; y entonces la fórmula de Clairaut suministrará el aplanamiento polar de la tierra, á saber:

$$a = \frac{5}{2}p - \frac{B}{A}$$

representando p, como antes, la relación de la fuerza centrífuga y la gravedad en el ecuador.

El método de cálculo que habitualmente se sigue no es, sin embargo, el que he indicado para explicar con más sencillez la resolución general del problema, sino que con el fin de eliminar hasta donde es posible los pequeños errores de observación, que influirían mucho en la determinación del aplanamiento, se combinan diversas observaciones ejecutadas en distintas latitudes, y se calculan así los valores más plausibles de las constantes A y B. Siendo $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ las longitudes del péndulo simple de segundos, medidas en lugares que tienen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots\ldots \varphi_n$ por latitudes, podrán combinarse las n ecuaciones de condición siguientes, entre las constantes indeterminadas A y B:

$$l_1 = A + B\,\text{sen.}^2\varphi_1$$
$$l_2 = A + B\,\text{sen.}^2\varphi_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$l_n = A + B\,\text{sen.}^2\varphi_n$$

La mejor combinación es la de los mínimos cuadrados, que suministra los valores más probables de las incógnitas, formando las ecuaciones normales por la regla que consta en la nota del número 34. Aplicada á este caso y haciendo:

$$(l) = l_1 + l_2 + \dots\dots\dots\dots l_n$$
$$(l\,\text{sen.}^2\varphi) = l_1\,\text{sen.}^2\varphi_1 + l_2\,\text{sen.}^2\varphi_2 + \dots\dots\dots l_n\,\text{sen.}^2\varphi_n$$
$$(\text{sen.}^2\varphi) = \text{sen.}^2\varphi_1 + \text{sen.}^2\varphi_2 + \dots\dots\dots\dots\dots \text{sen.}^2\varphi_n$$
$$(\text{sen.}^4\varphi) = \text{sen.}^4\varphi_1 + \text{sen.}^4\varphi_2 + \dots\dots\dots\dots\dots \text{sen.}^4\varphi_n$$

las normales entre A y B serán:

$$(l) - nA - B(\text{sen.}^2\varphi) = 0$$
$$(l\,\text{sen.}^2\varphi) - A(\text{sen.}^3\varphi) - B(\text{sen.}^4\varphi) = 0$$

cuya resolución proporciona los valores de las dos incógnitas que satisfacen mejor el conjunto de las ecuaciones de condición.

Para presentar una aplicación numérica tomemos algunas de las medidas del péndulo de segundos hechas en América por el capitán Sabine.

Lugares.	Latitudes.	l.	Ecuaciones de condición.
St. Thomas..........	0° 25′	$0^m.99111$	$0.99111 = A + 0.0001\,B$
Jamaica..............	17 56	0 .99147	$0.99147 = A + 0.0948\,B$
Nueva York.........	40 43	0 .99315	$0.99315 = A + 0.4255\,B$
Groenlandia.........	74 32	0 .99575	$0.99575 = A + 0.9289\,B$

Los coeficientes de B son los valores numéricos de los cuadrados de los senos de las latitudes. Calculando los de las ecuaciones normales, tendremos que éstas serán:

$$3.97148 - 4.0000\,A - 1.4493\,B = 0$$
$$1.44164 - 1.4493\,A - 1.0529\,B = 0$$

Dividiendo cada ecuación por el coeficiente que en ella tiene A, hallaremos:

$$0.99287 - A - 0.3623\,B = 0$$
$$0.99471 - A - 0.7265\,B = 0$$

Estas dan por adición y substracción:

$$A = 0.99379 - 0.5444\,B$$
$$0.00184 = 0.3642\,B$$

Por la última se obtiene: $B = 0^m.00505$, valor que sustituído en la otra, produce: $A = 0^m.99104$.

Según este ejemplo, la longitud del péndulo simple de segundos en cualquiera latitud φ, será:

$$l = 0^m.99104 + 0^m.00505\,\text{sen.}^2\varphi$$

Con estos datos calculemos ahora el aplanamiento por la fórmula de Clairaut, recordando que la relación entre la fuerza centrífuga y la gravedad ecuatoriales, es: $p = \frac{1}{289} = 0^m.00346$.

$$a = \frac{5}{2} \times 0.00346 - \frac{0.00505}{0.99104} = 0.00355 = \frac{1}{282} \text{ próximamente.}$$

Mr. Airy, por medio de una combinación análoga de 49 de las mejores observaciones del péndulo, hechas á diversas latitudes en ambos hemisferios, halla: $A = 0^m.99101$ y $B = 0^m.00509$. De estos elementos resulta que la compresión polar, es: $a = 0.00351 = \frac{1}{285}$.
