

## CAPITULO X.

### LEVANTAMIENTO DE CARTAS GEOGRÁFICAS POR PROCEDIMIENTOS ASTRONÓMICOS.

96.—Indiqué en el Capítulo anterior las dificultades que presenta una triangulación geodésica regular de cierta extensión, tanto por el tiempo que demanda, cuanto por su costo. A causa de estas circunstancias, solamente se han emprendido trabajos geodésicos en grande escala en países comparativamente pequeños, muy poblados, y en los cuales las necesidades de la administración han exigido operaciones exactas para la formación de sus cartas geográficas. Nuestro país, colocado en condiciones diametralmente opuestas, no tendrá en muchos años iguales exigencias; y por tanto, la esperanza de que vaya formándose su Geografía no debe cifrarse en la ejecución de grandes trabajos geodésicos que, por decirlo así, son los que vienen á perfeccionar una Geografía ya bastante avanzada; sino en la práctica de operaciones que suministren las bases de esa dilatada elaboración, describiendo á la vez á grandes rasgos los caracteres más prominentes de nuestro vasto territorio.

Los procedimientos astronómicos son los que llenan estas condiciones, ofreciendo al mismo tiempo, respecto de los geodésicos, la ventaja de ser más económicos, en atención á que, en general, demandan menos personal; la de una ejecución comparativamente más rápida y, en consecuencia, la de ser más á propósito para los países que por su escasa población, extenso territorio y pocos recursos, no

presentan toda la comodidad indispensable para una operación geodésica. Otra superioridad que tienen los métodos astronómicos sobre los geodésicos, consiste en que basta ejecutar ciertas observaciones en un punto cualquiera para que quede éste fijado por su posición geográfica, sin necesidad de enlazarlo con otros puntos ya dados de posición, como se necesita en las triangulaciones. Para formar una cadena trigonométrica, además de la operación larga y difícil de medir una ó más bases, y de tener que elegir los vértices que reúnan determinados requisitos, es del todo indispensable la condición de visibilidad, quiere decir, la de que cada punto sea visible desde todos los que lo rodean; circunstancia que no se necesita en las operaciones astronómicas, á causa de la independencia absoluta con que por su medio puede fijarse la posición de un lugar.

En cambio de estas ventajas, los procedimientos astronómicos nunca pueden presentar un enlace tan íntimo como los geodésicos, y en consecuencia, si los primeros suministran, por lo general, con más exactitud las posiciones geográficas, los segundos dan más precisión en las distancias, y una vez ejecutadas las operaciones preliminares de la triangulación, no demandan tanto trabajo como los astronómicos, cuyas observaciones son constantemente las mismas para cada punto.

Atendiendo á todas estas consideraciones, y combinando las ventajas especiales de ambos métodos, procuraré indicar un modo muy conveniente de practicar con rapidez las operaciones indispensables para la formación de una carta geográfica con la exactitud bastante para cubrir por mucho tiempo las necesidades de nuestro país. Fundado este procedimiento en trabajos astronómicos, sus resultados no sólo servirán de apoyo inmediato á las demás operaciones, sino que suministrarán bases permanentes y seguras utilizables en los futuros perfeccionamientos de nuestra Geografía.

97.—Supongamos para mayor claridad que en una extensión de terreno de 20 á 25 leguas de diámetro, se escoge un lugar central desde el cual se descubra la mayor parte de los puntos que deban figurar en la carta, como poblaciones, haciendas, montañas notables, etc., y que al derredor de ese lugar y en las eminencias que limiten

el horizonte se elijan otros cinco ó seis puntos que presenten las mismas condiciones que el primero. Si en cada una de esas estaciones se practican las observaciones astronómicas necesarias para determinar su posición geográfica, se obtendrá un número considerable de bases formadas por los observatorios de dos en dos, á las cuales podrán referirse por medio de ángulos horizontales las posiciones de todos los demás puntos. Cada estación servirá en seguida de punto central para proseguir la operación, enlazándolo con nuevos puntos elegidos como se ha dicho, y continuando de una manera idéntica en toda la extensión del territorio cuya carta se desea formar.

Como las extremidades de esas grandes bases se han determinado astronómicamente, no hay dificultad para calcular sus magnitudes y sus direcciones, aplicando las primeras fórmulas del Capítulo precedente, á saber:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{(L' - L) \cos. \varphi'}{C} \\ y &= \frac{\varphi' - \varphi}{A} + \frac{B}{A} x^2 \\ \tan. u &= \frac{x}{y} \\ k &= \frac{x}{\text{sen. } u} = \frac{y}{\text{cos. } u} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

en las cuales  $\varphi$ ,  $L$  y  $\varphi'$ ,  $L'$  representan respectivamente la latitud y la longitud de los extremos de la línea, siendo  $u$  su azimut y  $k$  su extensión lineal. Los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$  se toman de la Tabla del número 71 para la latitud media  $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ , según se dijo en otra parte. Habiendo ya hecho alguna aplicación de estas fórmulas, no juzgo necesario presentar en su totalidad nuevos cálculos numéricos, y sólo consignaré aquí los siguientes datos y la resolución que de ellos se deduce, á fin de que sirvan de ejercicio para el lector.

*Ejemplo.*—Las posiciones de los cerros de Ixtapalapa y de Chiconautla en el Valle de México, son:

Chiconautla.....	$\varphi' = 19^\circ 39' 11''.9$	.....	$L' = -41'.10$
Ixtapalapa.....	$\varphi = 19^\circ 20' 41''.7$	.....	$L = -11.88$

Las longitudes están expresadas en tiempo y referidas al meridiano de la Escuela de Ingenieros. Se hallará:  $\varphi' - \varphi = 1110''.2$  y  $L' - L = -433''.3$ , elementos de los cuales resulta que el azimut de la línea *Ixtapalapa-Chiconautla* es:  $u = 339^\circ 29' 45''.4$  y su extensión:  $k = 36448''.3$ .

El azimut en el Chiconautla sería:

$$u' = u - 180^\circ + (L' - L) \text{sen. } \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = 159^\circ 27' 19''.1$$

Se comprende que por medio de observaciones angulares ejecutadas en las extremidades de una línea como ésta, que tiene casi nueve leguas de largo, será fácil situar todos los puntos comprendidos dentro de un radio igual, por lo menos, á la mitad ó á las dos terceras partes de esa distancia. Las torres de las ciudades, pueblos, haciendas, etc., las cimas de las montañas y todos los demás objetos que se juzguen dignos de figurar en las cartas, quedarán así referidos á una base conocida por su extensión y su azimut, y en consecuencia, el cálculo trigonométrico podrá suministrar los mismos elementos para cada uno de estos objetos. Es claro que algunos de los puntos fijados de esa manera podrán servir á su vez de estaciones, ya sea para detallar más la carta, ya para proseguir las operaciones formando una triangulación más ó menos regular.

98.—La exactitud con que se determine la línea fundamental depende de la que tengan los datos ó elementos observados  $L' - L$  y  $\varphi' - \varphi$ ; y como siempre hay que contar con los pequeños errores, inevitables en todo género de medidas directas, es muy importante investigar cuál es la influencia de esos errores, y en qué circunstancia se reduce á la menor posible. Con este fin notemos, según lo indican las fórmulas precedentes, que los valores de  $u$  y de  $k$  dependen inmediatamente de los de  $x$  é  $y$ ; y por consiguiente, estudiando la influencia que en estos tienen los errores de observación, será fácil hallar la que tendrán en la resolución final del problema; pero como

en esta clase de investigaciones es más breve servirse de formulas aproximativas, prescindiremos del segundo término del valor de  $y$ , que por su pequeñez influye muy poco en el resultado, y adoptaremos:

$$x = \frac{(L' - L) \cos. \varphi'}{C} \quad y = \frac{\varphi' - \varphi}{A} \quad \tan. u = \frac{x}{y} \quad k = \frac{x}{\text{sen. } u}$$

Diferenciando las dos primeras con relación á los elementos observados, se tiene:

$$dx = \frac{\cos. \varphi'}{C} d(L' - L) \quad dy = \frac{1}{A} d(\varphi' - \varphi)$$

y supondremos que  $d(L' - L)$  y  $d(\varphi' - \varphi)$  representan los pequeños errores de observación.

Si se diferencia ahora el valor de  $u$ , resulta:

$$\frac{du}{\cos.^2 u} = \frac{y dx - x dy}{y^2} = \frac{y dx - x dy}{k^2 \cos.^2 u}$$

de donde se obtiene sin dificultad:

$$du = \frac{\cos. u dx - \text{sen. } u dy}{k}$$

Finalmente, el valor de  $k$  produce:

$$dk = \frac{dx - k \cos. u du}{\text{sen. } u}$$

y sustituyendo el valor de  $du$  se halla:

$$dk = \text{sen. } u dx + \cos. u dy$$

Introduciendo en esta expresión los valores de  $dx$  y  $dy$  se encuentra por último:

$$dk = \frac{\cos. \varphi' \text{sen. } u}{C} d(L' - L) + \frac{\cos. u}{A} d(\varphi' - \varphi)$$

ecuación que representa el error originado en la distancia en virtud de los existentes en los datos. De las cantidades que constituyen los coeficientes de los errores, sólo es dueño el observador de elegir el valor de  $u$ , porque todas las otras dependen de la latitud en que opera; y adoptando valores medios de  $A$ ,  $C$  y  $\varphi'$ , se tendrá:

$$dk = 28.4 \text{sen. } u d(L' - L) + 30.8 \cos. u d(\varphi' - \varphi)$$

Esta expresión manifiesta que la influencia de un pequeño error en la diferencia de longitudes observada, varía en proporción del seno del azimut; y por consiguiente se nulifica cuando  $u$  es igual á  $0^\circ$  ó á  $180^\circ$ , quiere decir, cuando las dos estaciones están bajo el mismo meridiano. El error que origina el que tenga la diferencia de latitudes disminuye, por el contrario, cuando crece el azimut, y se reduce á cero en el caso de ser  $u$  de  $90^\circ$  ó de  $270^\circ$ , ó lo que es lo mismo, cuando la línea esté dirigida de Oriente á Poniente.

En el supuesto de que tenga libertad el observador para escoger sus estaciones, debe procurar que la dirección de la línea se acerque al límite más favorable para disminuir el efecto de aquel de los elementos observados que crea poder obtener con menor precisión; y en este particular conviene advertir desde luego que la determinación de la diferencia de latitudes es una operación que, en general, se presta á mayor exactitud que la medida de la diferencia de longitudes. Esta última se hace siempre por medio de observaciones de tiempo, para obtener las horas que se cuentan en las dos estaciones en un mismo instante físico; y como cada segundo de tiempo equivale á 15 de arco, resulta que una incertidumbre de  $0''.1$  en la diferencia de horas produce  $1''.5$  de duda en el valor de  $L' - L$ , sin que, en general, sea posible reducir los límites de aquella incertidumbre. La diferencia de latitud, por el contrario, puede obtenerse con mucha precisión y en poco tiempo; creo que observando los mismos astros en las dos estaciones, haciendo uso de los mismos métodos y, si es posible, de los mismos instrumentos, es fácil obtener en muy pocos días el valor de  $\varphi' - \varphi$  con un error que no exceda de  $0''.2$  aun cuando las latitudes absolutas  $\varphi$  y  $\varphi'$  resulten con un error algo más considerable, lo cual no es un inconveniente para el

cálculo de la línea geodésica, puesto que en las fórmulas sólo figura el coseno de la latitud, y bastan las latitudes aproximativas para tomar exactamente de la Tabla (número 71) los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Según estas consideraciones, siempre será preferible escoger las estaciones de Norte á Sur con muy poca diferencia, á fin de que no haya que temer mucho el efecto del pequeño error que pueda haber en  $L' - L$ .

Si las dos estaciones se eligen precisamente en el mismo meridiano, el error de la distancia se reduce á  $dk = 30.8 d(\varphi' - \varphi)$ , y atribuyendo al error  $d(\varphi' - \varphi)$  el valor de  $0''.2$ , el error de la línea será de unos  $6^m$ , el cual no se puede suponer muy considerable en este género de observaciones, y sobre todo, para una carta geográfica que se construye generalmente en pequeña escala. Un error de esta magnitud no representará más que una pequeñísima fracción de una línea de 40 ó 50 kilómetros; y como con una gran base se pueden situar los puntos distantes por medio de visuales comparativamente cortas, resultarían las posiciones con errores realmente inapreciables en la carta.

99.—La dificultad de obtener con cierto grado de precisión las diferencias de longitud, me sugirió la idea de sustituir á este elemento la medida directa del azimut de la línea, que es una operación incomparablemente más sencilla. En un opúsculo que con el título de "Colección de Tablas geodésicas" publiqué hace algún tiempo, indiqué este procedimiento, que repetiré aquí por juzgarlo de bastante utilidad.

Si se determina la diferencia de las latitudes de dos puntos, y en uno de ellos se observa astronómicamente el azimut del otro, tendremos que en la fórmula:

$$\varphi' - \varphi = A k \cos. u - B k^2 \text{sen.}^2 u$$

todo será conocido, con excepción de  $k$ . Como el último término es siempre muy pequeño, no se altera sensiblemente su valor cuando se sustituye por  $k$  una cantidad aproximativa, y en consecuencia, podrá determinarse un valor exacto de la distancia por aproximaciones su-

cesivas. Suponiendo nulo el último término se obtendrá por primera aproximación:

$$k = \frac{\varphi' - \varphi}{A \cos. u}$$

é introduciendo esta cantidad en el mismo término, resultará por valor prácticamente exacto:

$$k = \frac{\varphi' - \varphi}{A \cos. u} + \frac{B}{A} \left( \frac{\varphi' - \varphi}{A \cos. u} \right)^2 \text{sen. } u \text{ tan. } u \dots\dots\dots (2)$$

Obtenida la distancia se calcula la diferencia de longitud de las dos estaciones, así como el azimut inverso, por las fórmulas:

$$L' - L = \frac{C k \text{sen. } u}{\cos. \varphi'}$$

$$u' = u \pm 180^\circ + (L' - L) \text{sen. } \frac{1}{2} (\varphi + \varphi')$$

y de esta manera se reúnen todos los elementos necesarios para situar nuevos puntos respecto de esta base.

*Ejemplo.*—Tomando las latitudes de los cerros de Chiconautla y de Ixtapalapa, supongamos que en el primero de estos puntos se hubiera medido directamente el azimut del otro, siendo  $u = 159^\circ 27' 19''$  el resultado de la observación. Adoptando los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$  que corresponden á la latitud media  $19^\circ 30'$ , tendríamos:

$\varphi' - \varphi$ .....	3.0454012—	$B$ .....	0.9555
$A$ .....	—8.5122052	sen. $u$ .....	9.5452
cos. $u$ .....	—9.9714607—	tan. $u$ .....	9.5738—
	<hr/>		
	4.5617353.....	cuad.....	9.1235
	<hr/>		
	36453 <sup>m</sup> .2		9.1980—
	—4.9	$A$ ....	—8.5122
	<hr/>		
	$k = 36448^m.3$		0.6858—

Este resultado es idéntico al que se obtuvo por el otro método. La misma distancia se hallaría suponiendo que la observación azi-

mutal se hubiese ejecutado en el Ixtapalapa y que se hubiera obtenido  $u = 339^\circ 29' 45''.4$ , como lo manifiesta el cálculo siguiente:

$\varphi' - \varphi$ .....	3.0454012	$B$ .....	0.9555
$A$ .....	-8.5122052	sen. $u$ .....	9.5444-
cos. $u$ .....	-9.9715762	tan. $u$ .....	9.5728-
	<u>4.5616198</u>	.....cuad.....	<u>9.1232</u>
			9.1959
	36448 <sup>m</sup> .5	$A$ .....	-8.5122
	+4 .8	.....	<u>0.6837</u>
	<u><math>k = 36448^m.3</math></u>		

Siendo en este método  $\varphi' - \varphi$  y  $u$  los datos necesarios para la resolución, investiguemos en qué condiciones se reduce á su *minimum* la influencia de los errores que puedan contener. Diferenciando con este objeto la fórmula aproximativa  $k = \frac{\varphi' - \varphi}{A \cos. u}$ , se halla después de abreviar:

$$dk = \frac{1}{A \cos. u} d(\varphi' - \varphi) + \frac{(\varphi' - \varphi) \tan. u}{A \cos. u} du$$

Esta expresión manifiesta que el efecto del error que tenga la diferencia de latitudes es el menor posible cuando las estaciones estén en el mismo meridiano, y que en las mismas circunstancias se nulifica la influencia del error del azimut observado; por consiguiente, debe procurarse que la línea quede casi establecida de Norte á Sur. Conviene notar, sin embargo, que para que exprese segundos el valor de  $du$ , es preciso multiplicarlo por seu.  $1''$ , y así es que su coeficiente será muy pequeño siempre que el azimut mismo no sea considerable. Como también un valor pequeño de  $u$  no altera mucho el coeficiente de  $d(\varphi' - \varphi)$ , se infiere que aunque la línea esté bastante inclinada respecto del meridiano, puede obtenerse muy buen resultado si se logra reducir á los menores valores posibles los errores de los elementos observados  $u$  y  $\varphi' - \varphi$ .

Se ve que, en último resultado, se obtienen tanto por el primer método como por el segundo, la magnitud y la orientación de la lí-

nea que une las dos estaciones, así como las posiciones geográficas de éstas. Con estos elementos, y las medidas angulares practicadas en ambas extremidades para situar nuevos puntos, se determinan las distancias de esos objetos, sus azimutes y sus coordenadas geográficas. Los puntos mejor situados respecto de la línea sirven en seguida para enlazar otros, prosiguiendo así la operación, y procurando, siempre que se pueda, hacer observaciones astronómicas, con el fin de determinar nuevas bases que sirvan de comprobación, si es que la carta abraza una extensión considerable.

Todo lo que antecede demuestra la facilidad con que pueden medirse astronómicamente una ó más grandes bases para formar con rapidez la Geografía de vastas regiones, con un grado de exactitud muy suficiente para las necesidades de nuestro país, al cual, por consiguiente, puede prestar servicios de mucha importancia un ingeniero medianamente diestro en el manejo de los instrumentos astronómicos. Las dificultades que, según he indicado, presenta la práctica de grandes operaciones geodésicas, me indujeron á exponer en este Capítulo los principales procedimientos con que aquéllas pueden sustituirse, y espero que su lectura será bastante para demostrar que el porvenir de la Geografía de México depende por ahora de la ejecución de trabajos puramente astronómicos.