CAPITULO IX.

TRAZO DE LÍNEAS EXTENSAS.

85.—Ahora que he terminado la exposición de las principales operaciones que demanda una triangulación geodésica, me propongo dar á conocer en este Capítulo y en el siguiente algunas aplicaciones importantes, que aunque basadas en operaciones más bien astronómicas que geodésicas, tienen, sin embargo, bastantes puntos de contacto con los procedimientos de la Geodesia para que me sea permitida su exposición antes que la de los astronómicos que les sirven de fundamento. Comencemos por el trazo de las líneas geográficas.

En la demarcación de los límites territoriales entre dos naciones ó Estados vecinos, se ofrece frecuentemente el establecimiento de grandes líneas geodésicas. Por lo regular, se estipula de antemano cuáles deben ser los extremos de esas líneas, ya sea que se definan por sus posiciones geográficas, ó ya por ser puntos notables bajo cualquier otro aspecto. En el primer caso, es preciso comenzar por señalar en el terreno los puntos que corresponden á las posiciones geográficas asignadas; y en el segundo determinar las de los extremos dados.

Debe advertirse desde luego que si entre los puntos así establecidos se ejecuta una triangulación geodésica, con los elementos que

esta suministre podrán determinarse la magnitud y la dirección de las líneas que los unen; y, por consiguiente, demarcarse estas sobre el terreno, operando de una manera semejante á la que se ha indicado para el trazo de pequeñas líneas topográficas (Tomo I, número 113). Este método no es, sin embargo, el más fácil de aplicar; porque una triangulación geodésica, además de mucho tiempo de trabajo, exige generalmente un numeroso personal, crecidos gastos y otros elementos de que no siempre es posible disponer. Por estas razones, voy á exponer otro procedimiento comparativamente sencillo, y cuya exactitud casi no depende más que de la precisión con que se determinen las posiciones geográficas de los extremos de la línea.

Si los puntos están dados sobre el terreno, deben determinarse sus latitudes y la diferencia de sus longitudes por medio de los procedimientos astronómicos que se enseñarán en la parte tercera de este libro, ejecutando en los mismos puntos las observaciones necesarias; mas si sólo lo están por sus posiciones geográficas, es preciso comenzar, según se dijo antes, por buscar los puntos que correspondan á las posiciones dadas. A este fin se establece el observador en un lugar inmediato al que desea señalar, lo cual siempre es fácil, bien sea por la simple apreciación que puede hacer en una carta geográfica, ó lo que es preferible, por medio de algunas observaciones aproximativas que ejecute.

Admitamos que de este modo se haya colocado en un punto muy próximo al que tiene que demarcar en el terreno, cuya posición dada supondré que es φ' en latitud y L' en longitud. Entonces el observador deberá determinar con toda precisión la latitud φ y la longitud L de su estación provisional, así como la dirección del meridiano astronómico que pasa por ella. Con estos datos tiene lo necesario para calcular la magnitud y la dirección de la línea que une su observatorio con el punto que desea hallar. En efecto, puesto que conoce las diferencias $\varphi' - \varphi$ y $L' - L$ podrá aplicar las fórmulas (2) y (4) del Capítulo VII para obtener por su combinación el azimut u y la extensión k de esa distancia. Como por el supuesto se ha colocado cerca del punto incógnito, podrá omitirse sin inconveniente, el último y pequeño término de la primera de las fórmulas mencionadas, para tomar:

$$\varphi' - \varphi = A k \cos. u \qquad (L' - L) \cos. \varphi' = C k \operatorname{sen.} u$$

El cociente de estas da el azimut, á saber:

$$\tan. u = \frac{A(L'-L)}{C(\varphi'-\varphi)} \cos. \varphi'$$

y en seguida cualquiera de ellas la distancia

$$k = \frac{\varphi' - \varphi}{A \cos. u} = \frac{(L'-L)\cos. \varphi'}{C \operatorname{sen.} u}$$

Ejemplo.—Supongamos que se tiene necesidad de señalar en el terreno el punto de la Baja California que corresponde á la intersección del paralelo de 27° 00′ de latitud con el meridiano de 13° 52′ 51″ al Oeste de México, y que el observador ha determinado para un punto cercano la posición: $\varphi = 27° 2' 17''.4$ y $L = 13° 51' 3''.0$. Tomando en la Tabla del número 71 los logaritmos de A y C para la latitud φ, tendremos:

$\varphi' =$	27° 00′ 00″.0	$L' =$	13° 52′ 51″.0
$\varphi =$	27 2 17 .4	$L =$	13 51 3 .0
$\varphi' - \varphi =$	−137″.4	$L' - L =$	+108″.8

A	8.51179		
$L'-L$	2.03342		
cos. φ'	9.94988	$\varphi' - \varphi$	2.13799−
C	−8.50948	A	−8.51179
$\varphi' - \varphi$	−2.13799−	cos. u	−9.91257−
tan. u	9.84762−	k	3.71362
	$u = 144° 51' 4''$		$k = 5171^m.6$

Obtenidos estos resultados, se trazará una línea que forme con el meridiano de la estación un ángulo de 35° 8′ 56″ del Sur al Oeste, y se medirá en esa dirección la distancia k, cuyo término señala el punto que se busca. Si la medida directa presenta algún inconve-

niente, puede establecerse la línea por uno ó dos pequeños triángulos. Para el trazo material, véase el número 113 del primer Tomo.

86.—Demarcadas de este modo las dos extremidades de una línea geodésica, veamos cómo se determina su magnitud y su dirección. Designemos por φ y φ', L y L' las latitudes y las longitudes de esos puntos, haciendo para abreviar:

$$x = k \operatorname{sen.} u$$
$$y = k \cos. u$$

las fórmulas (2) y (4) del Capítulo VII, darán:

$$Ay - Bx^2 = \varphi' - \varphi$$
$$Cx = (L' - L) \cos. \varphi'$$

Despejando de esta última el valor de x, de la otra el de y, y dividiendo uno por otro los valores de x é y, se obtendrán sin dificultad las siguientes ecuaciones, que calculadas por su orden, contienen toda la resolución del problema:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(L'-L)\cos. \varphi'}{C} \\ y &= \frac{\varphi'-\varphi}{A} + \frac{B}{A} x^2 \\ \tan. u &= \frac{x}{y} \\ k &= \frac{x}{\operatorname{sen.} u} = \frac{y}{\cos. u} \end{aligned}\right\} \text{.................. (1)}$$

Se recordará que u representa el azimut de la línea en el punto cuya latitud es φ. Para que $\varphi' - \varphi$ sea siempre positiva, convendremos en tomar por φ la menor de las dos latitudes. Es también importante calcular los valores de A, B y C para la latitud media

$\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$, especialmente si la línea es algo extensa, puesto que estas cantidades varían algo con la latitud, y podría producir algún error el considerarlas como constantes é iguales á las que correspondieran á un extremo de la distancia.

Para aplicar estas fórmulas, tomemos como ejemplo los elementos que sirvieron para trazar una de las líneas divisorias entre las Repúblicas de México y de los Estados Unidos, en virtud del tratado de 1848. Según él, la línea limítrofe debe partir de un punto de nuestras costas occidentales (California) situado á una legua marina (5564^m.6) al Sur del punto más austral del puerto de San Diego, y terminar en el punto de confluencia de los ríos Gila y Colorado. Para establecer el punto inicial, las comisiones Mexicana y Americana midieron la legua marina en el meridiano que pasa por la parte más meridional de aquel puerto, y situaron sus campos astronómicos á inmediaciones del punto, con el fin de determinar sus coordenadas geográficas. Después de terminadas las observaciones por el Sr. Salazar Ilarregui, como astrónomo mexicano, y por Mr. W. H. Emory, astrónomo americano, las refirieron al punto inicial de la línea limítrofe por medio de algunos triángulos pequeños, obteniendo por resultado para este último:

$$\varphi = 32°\,31'\,59''.6$$
$$L = 117°\ \ 5\ 16\ .5 \text{ al Oeste de Greenwich.}$$

Una serie de operaciones análogas se ejecutó después para determinar el punto de unión de los ríos Gila y Colorado, y para fijar su posición geográfica, que se encontró ser:

$$\varphi' = 32°\,43'\,32''.2$$
$$L' = 114\ \ 32\ \ 51\ .6 \text{ al Oeste de Greenwich.}$$

Calculemos con estos datos la longitud y la dirección de la línea, tomando de la Tabla del número 71 los valores de A, B y C para la latitud media 32° 38′.

$$\begin{aligned} \varphi' &= 32°\,43'\,32''.2 \\ \varphi &= 32\ \ 31\ \ 59\ .6 \\ \hline \varphi' - \varphi &= +\ \ 11'\,32''.6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L' &= 114°\,32'\,51''.6 \\ L &= 117\ \ \ 5\ 16\ .5 \\ \hline L' - L &= -2°\,32'\,24''.9 \end{aligned}$$

$L'-L$......	3.9611790	$\varphi'-\varphi$.....	2.8404825	x^2..........	0.7535
cos. φ'.....	9.9249350	A......	−8.5114242..........	......	−8.5114
C......	−8.5093597		4.3290583	B..........	1.2117
x.....	5.3767543−		21333^m.3		3.4538
y.....	−4.3833934		2843 .2		
tan. u......	0.9933609−		$y = 24176^m.5$		
$u = 275°\,47'\,52''.7$		x.....	5.3767543−		
		sen. u......	−9.9977725−		
		k.....	5.3789818.............		$k = 239321^m$

Se ve por estos resultados que la línea de California tiene más de 57 leguas mexicanas de largo, y que su azimut en el punto inicial es de 275° 47′ 52″.7, ó si se quiere, de 84° 12′ 7″.3 del Norte al Este. El azimut en el Gila se obtendrá por la fórmula (6) del Capítulo VII, á saber:

$L'-L$..............	3.96118−		
sen. $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$....	9.73175	$u - 180°$	$= 95°\,47'\,52''.7$
cos. $\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)$.....	−0.00000	c	$= -\ \ 1\ \ 22\ 11\ .0$
c............	3.69293−	u'	$= 94°\,25'\,41''.7$
$c = -\,4931''.0$			

De esta manera pudo trazarse la línea partiendo de uno y otro extremo.

Si se tuviese algún interés en calcular la amplitud angular de la línea geodésica, la fórmula (30) del Capítulo I, aplicada á este caso, daría: $\theta = 2°\,8'\,53''.3$.

87.—Como los únicos datos que se requieren para el trazo de una línea son las posiciones geográficas de sus extremos, se ve que el método expuesto es aplicable á un arco cualquiera, con tal que pertenezca á una sección vertical del elipsoide; pero si se trata de demarcar un arco perteneciente, por ejemplo, á un paralelo ó á cualquiera otra sección oblicua, es preciso establecerlo por puntos, apoyándose en una línea geodésica no muy distante de él. Supongamos que se quiera trazar un arco $B\,A\,B'$ (fig. 30ª) de un paralelo cuya latitud es φ. Lo primero que debe hacerse es determinar uno de sus puntos A, y para esto se observará la latitud de un lugar inmediato A' con el objeto de moverse en el meridiano de este punto lo que sea necesario para señalar en el terreno el punto A que tiene φ por latitud.

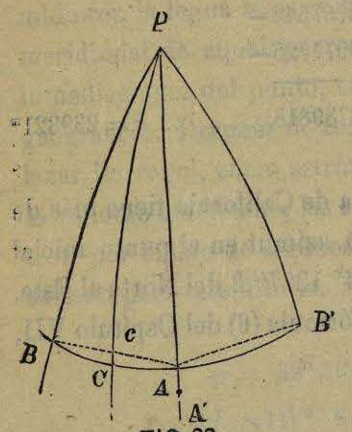

FIG. 30.

Sea λ la observada de A', y ρ el radio de curvatura del meridiano que corresponde á esa latitud; se tendrá entonces que $\varphi-\lambda$ representa la distancia angular de A' á A expresada en segundos, y $\frac{\varphi-\lambda}{A}$ la distancia itineraria en metros, siendo $A=\frac{1}{\rho\,\text{sen.}\,1''}$ cuyos logaritmos constan en la Tabla del número 71. Midiendo esa distancia en el meridiano, se situará el punto que se desea del paralelo. La línea se medirá hacia el Sur cuando resulte λ mayor que φ; y si la diferencia $\varphi-\lambda$ fuese muy considerable, deberán repetirse las observaciones de latitud en el punto así establecido, aplicando una nueva corrección si es necesario.

Una vez que se haya situado el punto A de latitud φ, sea $L'-L$ la diferencia de meridianos $A\,B\,P$ del arco $A\,C\,B$ que se quiere demarcar. Con estos elementos se pueden calcular los de la línea geodésica $A\,c\,B$, que por la apariencia que tiene en la figura designaré, para abreviar, con el nombre de cuerda del paralelo, aunque no es sino otro arco perteneciente á una sección vertical.

La magnitud y la dirección de esta cuerda se determinan por medio de las ecuaciones (1), con la única diferencia de hacer $\varphi'-\varphi=0$,

puesto que los extremos A y B tienen la misma latitud. En consecuencia, la fórmulas aplicables á este caso serán:

$$x=\frac{(L'-L)\cos.\varphi}{C}$$

$$y=\frac{B}{A}\,x^2$$

$$\tan.u=\frac{x}{y}$$

$$k=\frac{x}{\text{sen.}\,u}$$

Debe notarse que siendo comunmente pequeña la diferencia $L'-L$ de meridianos, el azimut u de la cuerda difiere poco de 90°; y si hacemos $u=90°-\omega$, el pequeño ángulo ω se obtendrá por la relación

$$\tan.\omega=\frac{y}{x}=\frac{B(L'-L)\cos.\varphi}{A\,C}$$

Si en ella se entroducen los valores $A=\frac{1}{\rho\,\text{sen.}\,1''}$, $B=\frac{0.5\tan.\varphi}{N\rho\,\text{sen.}\,1''}$ y $C=\frac{1}{N\,\text{sen.}\,1''}$, y además, se toma el arco ω por su tangente, resulta en segundos:

$$\omega=\frac{1}{2}(L'-L)\,\text{sen.}\,\varphi$$

En virtud de esta simplificación, las fórmulas que determinan la dirección y la magnitud de la línea, son:

$$\left.\begin{aligned} u&=90°-\frac{1}{2}(L'-L)\,\text{sen.}\,\varphi \\ k&=\frac{(L'-L)\cos.\varphi}{C\,\text{sen.}\,u} \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

El arco del paralelo que á la latitud φ abraza la longitud $L'-L$, tendrá por extensión lineal:

$$p=\frac{(L'-L)\cos.\varphi}{C}$$

de donde se deduce: $p=k\,\text{sen.}\,u$.

Veamos ahora cómo pueden situarse cuantos puntos intermedios del paralelo se deseen entre A y B. Sea $Ac = f$ una distancia cualquiera medida en la cuerda, y calculemos la pequeña parte $Cc = g$ del meridiano de c, comprendida entre la cuerda y el arco. Basta para esto recordar que si se designa por λ la diferencia de latitud entre A y c, ó lo que es lo mismo, entre C y c, se tiene:

$$\lambda = Af \cos. u - Bf^2 \operatorname{sen.}^2 u$$

y como el arco λ se convierte en medidas lineales dividiéndolo por A, hallaremos que $\frac{\lambda}{A}$ es la distancia g, y en consecuencia tendrá por valor:

$$g = f \cos. u - \frac{B}{A} f^2 \operatorname{sen.}^2 u$$

Atribuyendo, pues, á f diversos valores, se obtendrán por esta ecuación las distancias g de los puntos correspondientes de la línea geodésica al paralelo, las cuales medidas hacia el Sur en los meridianos respectivos darán otros tantos puntos del paralelo. Sin embargo, como por lo general es conveniente trazar esta curva por puntos equidistantes entre sí, llamando n una fracción cualquiera que exprese la relación entre la distancia $Ac = f$ y la cuerda total $AcB = k$, se tiene $f = nk$, valor que introducido en la fórmula anterior, produce:

$$g = nk \cos. u - \frac{B}{A} n^2 k^2 \operatorname{sen.}^2 u = ny - \frac{B}{A} n^2 x^2$$

y atendiendo al valor de y que consta arriba, se obtiene:

$$g = ny - n^2 y = n(1-n) y$$

de donde resulta por último:

$$g = n(1-n) \frac{B}{A} k^2 \operatorname{sen.}^2 u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

88.—De esta manera, calculando una sola vez la parte $\frac{B}{A} k^2 \operatorname{sen.}^2 u$, común á todas las ordenadas ó valores de g, con sólo variar la fracción n se obtendrán los coeficientes $n(1-n)$ que suministran con la mayor facilidad los elementos para situar muchos puntos del

paralelo. Si, por ejemplo, se desea que el arco total ACB quede dividido en 10 partes iguales, se hará sucesivamente n igual á 0.1, 0.2, 0.3, ... 0.9, lo cual equivale evidentemente á demarcar 9 puntos equidistantes entre los extremos A y B.

No ofrece mayor dificultad la aplicación de la fórmula cuando se desea que los espacios comprendidos entre esos puntos tengan una extensión dada. Sea, en efecto, q esta equidistancia, ó la extensión de los arcos parciales del paralelo; como la extensión total de este es:

$$p = \frac{(L'-L)\cos. \varphi}{C}$$

y está en nuestro arbitrio disponer del ángulo $L'-L$ que mide la diferencia de longitudes de los extremos de la línea geodésica auxiliar, si se desea establecer $m-1$ puntos intermedios, pondremos la condición $mq = p$, de donde resulta:

$$L'-L = \frac{Cmq}{\cos. \varphi}$$

y después de determinadas la dirección y la magnitud de la cuerda auxiliar por las fórmulas (2) con este valor de $L'-L$, se aplicará á la (3) para calcular las ordenadas, haciendo sucesivamente en ella á n igual á $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$ .... $\frac{m-1}{m}$, para obtener los $m-1$ puntos intermedios, ó sea $m+1$ incluyendo los extremos.

Tampoco hay dificultad alguna cuando se quiere que todos los puntos que se fijen del paralelo resulten á intervalos iguales en longitud geográfica, por ejemplo de 5′ en 5′; porque siendo Δ la diferencia constante de meridianos, se determinará el ángulo $L'-L$ con la condición de que abrace m veces la cantidad Δ, esto es:

$$L'-L = m\Delta$$

lo que evidentemente reduce este problema al anterior.

89.—Se ha dicho que en el término de cada distancia f contada desde el punto de partida A, se mide en el meridiano el valor de g

correspondiente; pero para no verse en la necesidad de trazar astronómicamente el meridiano de cada punto c de la línea, determinemos el azimut de $c\,A$, del cual deduciremos en seguida el ángulo $A\,c\,C$, á fin de que formando este ángulo con la línea geodésica, se pueda medir desde luego la distancia g en la dirección conveniente. Como he designado por u el azimut $P\,A\,B$ de la cuerda, llamando $\varDelta$ la diferencia de meridianos $A\,P\,C$ entre los puntos A y c, el azimut inverso en c será:

$$u' = 180° + u + \varDelta \operatorname{sen.} \varphi$$

En esta ecuación he empleado φ en lugar de la latitud media de C y c, en atención á la extremada pequeñez de la diferencia de las latitudes de esos puntos, la cual sólo es de algunos segundos. Por la misma razón tomo la fórmula siguiente para expresar la relación que existe entre $\varDelta$ y f:

$$\varDelta = \frac{Cf \operatorname{sen.} u}{\cos. \varphi} = \frac{Cnk \operatorname{sen.} u}{\cos. \varphi}$$

é introduciendo el valor de k suministrado por las ecuaciones (2) se obtiene:

$$\varDelta = n(L' - L)$$

lo cual demuestra que las diferencias parciales de meridianos guardan con la total la misma relación que las distancias correspondientes f y k. Sustituyendo en u' el valor de $\varDelta$, y el de u que dan las ecuaciones (2), resulta:

$$u' - 180° = 90° + \left(n - \frac{1}{2}\right)(L' - L) \operatorname{sen.} \varphi$$

y como $u' - 180°$ es igual al ángulo $A\,c\,C$ formado por la dirección de la línea geodésica con la de la ordenada g, si lo designamos por v se tendrá finalmente:

$$v = 90° + \left(n - \frac{1}{2}\right)(L' - L) \operatorname{sen.} \varphi \quad \text{..............} \quad (4)$$

90.—Las fórmulas (2), (3) y (4) contienen todo el cálculo necesario para el trazo de un arco del paralelo; y debe notarse que sólo el de k demanda el uso de logaritmos de siete cifras decimales, pues por la pequeñez de los otros elementos se tiene siempre la exactitud necesaria con logaritmos de cuatro ó cinco cifras. El coeficiente $n(1-n)$ que entra en los valores de g llega á su *maximum* cuando $n = \frac{1}{2}$, y adquiere valores iguales para puntos equidistantes del centro de la línea geodésica, circunstancia que ofrece la ventaja de reducir á la mitad el número de cálculos respecto del de puntos que se quieran fijar en el paralelo. Una cosa análoga sucede en los valores de v, cuyo último término da resultados iguales y de signos contrarios para puntos equidistantes del medio de la cuerda. Conviene, por último, advertir que con los mismos valores puede demarcarse un arco igual del paralelo en la parte opuesta del meridiano, como sería $A\,B'$ en la figura; de suerte que por medio de cálculos sumamente sencillos se traza un arco de una amplitud igual á $2(L' - L)$.

Respecto de la demarcación material, lo más importante es determinar astronómicamente con la mayor exactitud el meridiano del punto de partida A, y con la misma precision formar el ángulo azimutal u. Las distancias $f = n\,k$ se miden después sobre la línea, bien sea directamente, ó bien por medio de una triangulación topográfica, pues un pequeño error en ellas no produce notable error en el paralelo, como fácilmente se concibe por la inspección de la expresión de las ordenadas g. Finalmente, los ángulos v suministran las direcciones en que deben medirse estas ordenadas, que son siempre pequeñas.

Reunamos todas las fórmulas para hacer algunas aplicaciones.

$$\left.\begin{array}{ll} u = 90° - \frac{1}{2}(L' - L) \operatorname{sen.} \varphi & k = \frac{(L' - L)\cos. \varphi}{C \operatorname{sen.} u} \\ n = \frac{f}{k} \quad g = n(1-n)\frac{B}{A} k^2 \operatorname{sen.}^2 u & v = 90° + \left(n - \frac{1}{2}\right)(L' - L) \operatorname{sen.} \varphi \end{array}\right\} (5)$$

Según el tratado que celebró el gobierno de México con el de los Estados Unidos, una de las líneas limítrofes entre las dos Repúblicas es un arco del paralelo 31° 47′ de latitud, que partiendo del punto en que corta al río Bravo, tenga cien millas inglesas de extensión. Calculemos los elementos necesarios para trazar este arco.

Como una milla inglesa tiene 1609ᵐ.315, las 100 millas equivaldrán á 160931ᵐ.5, y siendo en este caso la extensión del arco el dato fundamental, calcularemos su amplitud $L'-L$ tomando de la Tabla III del número 23 el valor de 1°, que á la latitud de 31° 47′ se hallará ser de 94702ᵐ.6. Entonces por una simple proporción, tendremos:

$$L'-L=\frac{160931^{\text{m}}.5\times 3600''}{94702^{\text{m}}.6}=1°\,47'\,57''.6$$

La dirección y la magnitud de la línea geodésica auxiliar serán, pues:

$\frac{1}{2}$	9.69897		
$L'-L$	3.78658		3.7865811
sen. φ	9.72157	cos. φ	9.9294424
	3.20712	C	−8.5093791
		sen. u	−9.9999688
	−26′ 51″.1	k	5.2066576
	90° 00 00 .0		
	$u=89°\,33'\,8''.9$		$k=160937^{\text{m}}.6$

Supongamos ahora que se quisiesen puntos del paralelo á distancia de 10 millas uno de otro. Como esta es la décima parte de la total, haremos sucesivamente $n=0.1$, $n=0.2$, ... $n=0.5$, pues la otra mitad del arco tendrá las mismas ordenadas.

	$n=0.1$	$n=0.2$	$n=0.3$	$n=0.4$	$n=0.5$
B	1.1975				
k^2	0.4133				
sen.² u	9.9999				
A	−8.5115				
	3.0992	3.0992	3.0992	3.0992	3.0992
$n(1-n)$	8.9542	9.2041	9.3222	9.3802	9.3979
g	2.0534	2.3033	2.4214	2.4794	2.4973
	$g=113^{\text{m}}.1$	$201^{\text{m}}.0$	$263^{\text{m}}.9$	$301^{\text{m}}.6$	$314^{\text{m}}.1$

El cálculo de los ángulos de dirección de las ordenadas, será:

	$n=0.1$	$n=0.2$	$n=0.3$	$n=0.4$
$L'-L$	3.78658			
sen. φ	9.72157			
	3.50815	3.50815	3.50815	3.50815
$n-\frac{1}{2}$	9.60206−	9.47712−	9.30103−	9.00000−
	3.11021−	2.98527−	2.80918−	2.50815−
	−21′ 28″.9	−16′ 6″.7	−10′ 44″.4	−5′ 22″.2

Estos pequeños ángulos son los que deben sumarse con 90° para obtener las direcciones de las primeras ordenadas; y variándoles el signo suministrarán las de las últimas. De este modo pueden tabularse en la forma siguiente todos los elementos necesarios para fijar los 9 puntos intermedios del paralelo, con la equidistancia de 10 millas ó 16093ᵐ.2

ELEMENTOS PARA TRAZAR 100 MILLAS DEL PARALELO DE 31° 47′ DE LATITUD.

$k=160938^{\text{m}}$. $u=89°\,33'\,8''.9$

n	$n(1-n)$	f	g	v
0.1	0.09	16094ᵐ	113ᵐ.1	89° 38′ 31″.1
0.2	0.16	32187	201 .0	89 43 53 .3
0.3	0.21	48281	263 .9	89 49 15 .6
0.4	0.24	64375	301 .6	89 54 37 .8
0.5	0.25	80469	314 .1	90 00 00 .0
0.6	0.24	96563	301 .6	90 5 22 .2
0.7	0.21	112656	263 .9	90 10 44 .4
0.8	0.16	128750	201 .0	90 16 6 .7
0.9	0.09	144844	113 .1	90 21 28 .9

91.—Puede suceder que se ofrezca trazar un paralelo sin que sea posible fijar de antemano ni la extensión total del arco ni la diferencia de meridianos de sus extremos. Esta circunstancia no ofrece, sin embargo, inconveniente alguno; porque no es indispensable que la cuerda auxiliar termine precisamente en las extremidades del arco, y por consiguiente, pueden adoptarse una amplitud ó una extensión arbitrarias, y con ellas hacer los trazos hasta donde se quiera. Los cálculos se harían de esta manera para el paralelo de 27° por ejemplo, suponiendo que la operación se efectuase en la Baja California, hasta llegar á ambos mares. Como á la latitud de 27° tiene $99243^m.0$ el grado de paralelo, diez puntos que se demarcasen en él abrazan una extensión de 100 kilómetros, y en consecuencia, poco más de 1°. Tomando la amplitud correspondiente á esa extensión para calcular los elementos del trazo, se hallaría:

$$L' - L = \frac{3600'' \times 100^k}{99^k.243} = 3627''.5$$

y aplicando las fórmulas con este dato, se obtendría: $k = 100001^m$ y $u = 89° 46' 16''.6$.

Las abscisas f expresadas en kilómetros, las ordenadas g expresadas en metros y los ángulos de dirección v de estas últimas, serían las que constan en la tabla siguiente:

ELEMENTOS PARA LA DEMARCACION DEL PARALELO DE 27°.

$k = 100001^m$. $u = 89° 46' 16''.6$.

n	f	g	v
0.1	10^k	$35^m.9$	89° 49′ 1″.3
0.2	20	63 .9	89 51 46 .0
0.3	30	83 .8	89 54 30 .6
0.4	40	95 .8	89 57 15 .3
0.5	50	99 .8	90 00 00 .0
0.6	60	95 .8	90 2 44 .7
0.7	70	83 .8	90 5 29 .4
0.8	80	63 .9	90 8 14 .0
0.9	90	35 .9	90 10 58 .7

Partiendo de un punto central, es evidente que con estos datos podría trazarse un arco de algo más de 1°, tanto hacia el Este como hacia el Oeste, aun suponiendo que la Península abrazase en esa zona más de 2°; pero si no fuese así, se señalarían los puntos que permitiese su anchura, y si se desease dejar señalados los extremos del paralelo en las playas, se calcularían los valores de n correspondientes á las distancias f de las costas al punto de partida, por la relación $n = \frac{f}{k}$, y con estas se determinarían las últimas ordenadas. Supongamos, por ejemplo, que se llegase á la costa después de haber demarcado el noveno punto, y que la distancia al lugar en que se comenzó el trazo fuese de 97600^m. Se tendrá: $n = 0.976$, y con este valor resulta la última ordenada $g = 9^m.4$, y su ángulo de dirección $v = 90° 13' 3''.9$.

92.—Por las explicaciones y ejemplos que preceden se habrá comprendido que el ingeniero es dueño de escoger el valor de la amplitud $L' - L$ de una manera casi arbitraria, aunque procurando que no sea muy considerable á fin de que las distancias y las ordenadas no resulten demasiado grandes; y como el arco cuya amplitud es $L' - L$ tiene una extensión $p = \frac{(L'-L)\cos.\varphi}{C}$, y esta es igual á $k\,\text{sen.}\,u$, podemos deducir que hasta cierto punto tiene el operador la libertad de elegir el valor del azimut de su cuerda ó línea auxiliar. El azimut nunca deberá diferir mucho de 90° hacia el Oeste ó de 270° hacia el Este, si quieren evitarse los inconvenientes á que acabo de referirme; y sería mejor proceder siempre de manera que fuese pequeña la diferencia $L' - L$, aun cuando se tratase de trazar un arco muy extenso. La razón de conveniencia es esta: la línea geodésica establecida en la dirección u, puede resultar con pequeñas desviaciones, no obstante la precaución de señalar con el mayor cuidado aquellos de sus puntos solamente que sean indispensables para continuar su trazo, los cuales deberán situarse en las eminencias que vayan limitando el horizonte; y es claro que el efecto de cualquiera desviación aumentará con la magnitud de la línea. Bajo este aspecto, es sin duda preferible demarcar por partes el paralelo, escogiendo valores pequeños para $L' - L$, ó bien azimutes que se acerquen mucho á 90° para determinar las amplitudes correspondientes. Suponiendo, por ejemplo, que se deseara trazar un arco de $1°\,30'$ próximamente, podría hacerse la operación en tres partes, tomando para cada una $L'-L=30'$; pues al paso que no habría que temer mucho el efecto de las desviaciones, las ordenadas resultarían muy pequeñas, y después de fijar el último punto de cada arco parcial, podrían hacerse en él algunas observaciones de latitud para comprobar el trazo. Me parece, sin embargo, que una línea geodésica establecida por puntos á grandes distancias con un buen teodolito, debe resultar muy exacta, si se tiene cuidado de llevar en cuenta los errores de los niveles, de la colimación, etc., cuyos efectos en los ángulos azimutales se han explicado en el Capítulo V.

93.—El mayor valor que puede darse al azimut es el de 90°, y entonces la línea geodésica será el arco AB (fig. 31ª) del primer vertical de A. Este arco aparece en la figura como una tangente al paralelo, y por abreviación lo llamaré así, sin olvidar lo que realmente es. Las ordenadas tales como BC, se contarán hacia el Norte partiendo de la tangente, con un ángulo de dirección ABC.

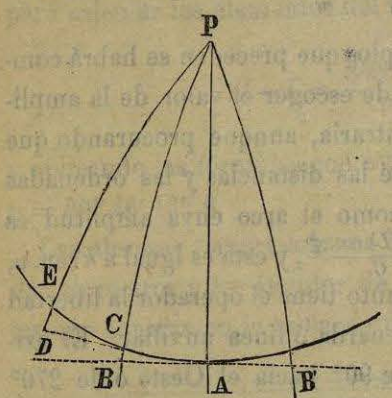

FIG. 31ª

A fin de calcular los elementos necesarios para el trazo, tenemos que, puesto que el azimut es de 90°, designando como antes por $L'-L$ la amplitud del arco ó sea el ángulo APB, la posición geográfica del punto B se obtendrá por las fórmulas:

$$\varphi'-\varphi=-Bk^2 \qquad L'-L=\frac{Ck}{\cos.\varphi}$$

El signo de $\varphi'-\varphi$ indica desde luego que la latitud φ' de B es menor que la de A; pero como ya se sabe que el pequeño arco BC ha de contarse hacia el Norte, designándolo por G expresado en metros, tendremos que las coordenadas de C serán:

$$k=\frac{(L'-L)\cos.\varphi}{C} \qquad G=\frac{B}{A}k^2$$

Para cualquier otro punto intermedio, llamando f su abscisa, g su ordenada y Δ la longitud correspondiente respecto de A, se tiene:

$$f=\frac{\Delta\cos.\varphi}{C} \qquad g=\frac{B}{A}f^2$$

Pero suponiendo, como en el caso de la cuerda, que se quisiesen establecer puntos equidistantes del paralelo, designaré por n la relación $\frac{f}{k}$ de una abscisa cualquiera á la total. Sustituyendo, pues, por f su valor nk, resulta que las fórmulas necesarias son:

$$k=\frac{(L'-L)\cos.\varphi}{C} \qquad g=\frac{B}{A}n^2k^2=Gn^2$$

Como se ve, las ordenadas crecen como los cuadrados de las distancias al punto de partida A, y de aquí se deduce que muy cerca de este punto casi se confunde el primer vertical, ó sea la tangente, con el arco del paralelo; pero que se separan rápidamente en seguida.

Si se designa por v el ángulo de dirección de las ordenadas, tendremos: $v'=360°-u'$, y como el azimut inverso tiene por expresión: $u'=270°+\Delta\,\text{sen.}\varphi$, siendo $\Delta=n(L'-L)$, se hallará:

$$v=90°-n(L'-L)\,\text{sen.}\varphi$$

También puede expresarse v en función de k, pues sustituyendo por $L'-L$ su valor, resulta:

$$v=90°-Cnk\tan.\varphi$$

En resumen, las fórmulas que deben calcularse para trazar un arco de paralelo por medio de su tangente, son:

$$\left.\begin{aligned} k&=\frac{(L'-L)\cos.\varphi}{C}\\ G&=\frac{B}{A}k^2\\ g&=Gn^2\\ v&=90°-Cnk\tan.\varphi=90°-n(L'-L)\,\text{sen.}\varphi \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (6)$$

94.—Antes de aplicarlas hagamos notar que el valor de k es verdaderamente la extensión p del arco de paralelo cuya amplitud es $L'-L$; y como si esta es muy grande podría resultar algo errónea la distancia k, busquemos un valor más exacto. Con este fin, designando por θ la amplitud de AB, el triángulo rectángulo APB da:

$$\tan.\theta = \tan.(L'-L)\cos.\varphi$$

Como por otra parte, se tiene $\theta = \tan.\theta - \frac{1}{3}\tan.^3\theta$ etc., hallaremos:

$$\theta = \tan.(L'-L)\cos.\varphi - \frac{1}{3}\tan.^3(L'-L)\cos.^3\varphi$$

Se tiene también $\tan.(L'-L) = (L'-L) + \frac{1}{3}(L'-L)^3$, y sustituyendo en la ecuación anterior hasta los términos de tercer orden, resulta en segundos:

$$\theta = (L'-L)\cos.\varphi + \frac{1}{3}[(L'-L)\cos.\varphi]^3\tan.^2\varphi\,\mathrm{sen.}^2 1''$$

y como $k = \frac{\theta}{C}$, se hallará, por último:

$$k = \frac{(L'-L)\cos.\varphi}{C} + (8.8940)\frac{[(L'-L)\cos.\varphi]^3\tan.^2\varphi}{C} \quad \text{......(7)}$$

que es el valor que debe adoptarse cuando $L'-L$ exceda por ejemplo, de 1°, pues en otros casos es muy pequeño el último término.

Calculemos por este procedimiento los elementos para trazar las 100 millas del paralelo de 31° 47′, que forma parte de las líneas limítrofes entre México y los Estados Unidos, recordando que su amplitud es: $L'-L = 1°\,41'\,57''.6$.

$L'-L$......	3.7865811	Const....	8.8940	B.....	1.1975		
cos. φ........	9.9294424	tan.² φ...	9.5843	k^2.....	0.4133	$L'-L$......	3.78658
	3.7160235	...cubo.....	1.1481	A...	−8.5115	sen. φ	9.72157
C....	−8.5093791	....	−8.5094	G.....	3.0993		3.50815
	5.2066444		1.1170				−53′ 42″.2
				$G=$	1256ᵐ.9		90 00 00 .0
						$v=$	89° 6′ 17″.8

1er. térm° = 160932ᵐ.7
1° id. = + 13 .1
k = 160945ᵐ.8

Este cálculo suministra las coordenadas extremas y el ángulo de dirección de la última ordenada; pero si quieren establecerse, por ejemplo, otros nueve puntos intermedios del paralelo, se multiplicará sucesivamente por 0.1, 0.2, ... 0.9 el valor de $(L'-L)$ sen. φ; y por 0.01, 0.04, ... 0.81, cuadrados de los coeficientes anteriores, el valor de G, y de esa manera se obtendrán los elementos que siguen:

ELEMENTOS PARA TRAZAR 100 MILLAS DEL PARALELO DE 31° 47′.

$k = 160946^{m}$. $u = 90°\,00'\,00''$.

n	n^2	f	g	v
0.1	0.01	16093	12ᵐ.6	89° 54′ 37″.8
0.2	0.04	32186	50 .3	89 49 15 .6
0.3	0.09	48281	113 .1	89 43 53 .3
0.4	0.16	64373	201 .1	89 38 31 .1
0.5	0.25	80468	314 .3	89 33 8 .9
0.6	0.36	96563	452 .5	89 27 46 .7
0.7	0.49	112657	615 .9	89 22 24 .5
0.8	0.64	128754	804 .5	89 17 2 .2
0.9	0.81	144847	1018 .1	89 11 40 .0
1.0	1.00	160946	1256 .9	89 6 17 .8

La Comisión americana de límites adoptó el método de la tangente para trazar este arco. No sé con certeza qué procedimiento de cálculo aplicó Mr. Emory para determinar sus elementos; pero los que da para el punto establecido á 60 millas del de partida, son los siguientes, que comparo con los que suministran las fórmulas anteriores.

	Según mis fórmulas.	Según Mr. Emory.
Latitud del extremo de la ordenada. $(\varphi' = \varphi - Bf^2)$	31°46′45″.3	31°46′45″.3
Ordenada extrema (g)..	452ᵐ.5	452ᵐ.4
Angulo de dirección de la ordenada v................	89°27′46″.7	89°27′47″.0

Se ve que todos estos elementos concuerdan muy bien con los del astrónomo americano.

95.—Dije antes que nunca será prudente trazar un arco extenso por medio de una sola línea auxiliar; y esta regla es de más importancia en el caso de seguir el método de la tangente, en atención á que las ordenadas van siendo más y más grandes á medida que crece la abscisa. Lo mejor será trazar algunos miriámetros con la primera tangente AB (fig. 31ª), y después, desde el último punto C, trazar otra tangente CD para demarcar un nuevo arco, prosiguiendo así hacia un lado y otro del meridiano que pasa por el primer punto A de partida. También de este modo se evita la necesidad de calcular la distancia k por la fórmula (7), pues cuando los arcos no pasan de 1°, se obtiene la exactitud suficiente por la primera de las (6).

Para ejercicio del lector pongo á continuación los elementos necesarios para demarcar, de miriámetro en miriámetro, diez puntos del paralelo 27° á un lado y otro del meridiano, ó sea para trazar un arco de $20^{\text{mirs.}}$, que abrazará una amplitud de $2°\ 00'\ 55''$.

ELEMENTOS PARA LA DEMARCACION DEL PARALELO DE 27°.

$k = 100002^{\text{m}}$. $u = 90°\ 00'\ 00''$.

n	f	g	v
0.1	10^{k}	$4^{\text{m}}.0$	$89°\ 57'\ 15''.3$
0.2	20	16 .0	89 54 30 .7
0.3	30	35 .9	89 51 46 .0
0.4	40	63 .9	89 49 1 .3
0.5	50	99 .8	89 46 16 .7
0.6	60	143 .7	89 43 32 .0
0.7	70	195 .6	89 40 47 .3
0.8	80	255 .5	89 38 2 .6
0.9	90	323 .4	89 35 18 .0
1.0	100	399 .2	89 32 33 .3

Este arco podría trazarse cómodamente por medio de dos tangen-

tes á cada lado del meridiano, cada una de las cuales tendría unos 50 kilómetros, y entonces la mayor ordenada no llegaría á 100 metros.

Al medir las coordenadas es preciso tomar en cuenta la altura de la localidad sobre el nivel del mar, pues los resultados del cálculo dan esas cantidades reducidas á la superficie del Océano. Por consiguiente, siendo a la altura, la abscisa que debe medirse en el terreno, es:

$$F = f + f\,\frac{a}{R'}$$

ó bien, su corrección será $F - f = f\,\frac{a}{R'}$, según lo demostrado en el número 39. En estas ecuaciones no hay inconveniente en tomar la normal N que corresponda á la latitud del lugar, en vez del radio R' de la esfera osculatriz. De este modo los puntos del paralelo se obtendrán con la equidistancia que se desea, contada en la superficie del mar.