del meridiano de 1° con el paralelo de 18°, suponiendo que la escala adoptada sea de $\frac{1}{1000000}$.

$\varphi' =$	$18°\ 00'$	$L=1°$....	0.00000		
$\varphi =$	$23\ \ 30$	sen. φ.....	9.60070		
$\delta = -$	$5°\ 30'$	V......	9.60070	$V=0°.3987=0°23'\ 55''.3$	
$\frac{R}{1000000}$.	0.80392	....	0.80392	$\gamma=$	$14^m.642$
tan. δ.....	8.98358—	cot. φ....	0.36170	$k= -$	$0\ .6131$
k.....	9.78750—	γ.......	1.16562	$\gamma-k=$	$15^m.255$
$\gamma-k$......	1.18341				
sen. V....	7.84252				
x.....	9.02593			$y=-0.6131+0^m.00037=-0^m.6127$	
tan. $\frac{1}{2}V$..	7.54170			$x=0^m1061$	
	6.56763	....	$0^m.00037$		

A causa de la pequeñez de las latitudes, se ve en este ejemplo que el radio de la proyección de un paralelo excede de 15 metros, y en consecuencia, sería casi siempre imposible trazar el arco por movimiento continuo, á no ser que fuese sumamente pequeña la escala de la carta.

Si L hubiera sido de $-1°$ se habrían hallado los mismos valores numéricos para x é y, aunque x de distinto signo; porque como se ha dicho, cada cálculo da las coordenadas de los puntos de intersección del paralelo de latitud φ' con los meridianos de $+L$ y de $-L$ grados de longitud. Parece inútil advertir que para facilitar y hacer con más exactitud la construcción de la proyección, es conveniente trazar cuidadosamente una cuadrícula arreglada á la escala, y tomar en sus lados las coordenadas de cada punto, lo mismo que se ha enseñado en la Topografía.

Las proyecciones cónicas, según se ve en la figura 24ª, se componen de un conjunto de cuadriláteros mixtilíneos, que se consideran equivalentes á los esféricos formados en la tierra por los meridianos

y los paralelos. En cada uno de ellos deben configurarse todos los objetos contenidos en el cuadrilátero terrestre correspondiente, situando por sus coordenadas los puntos principales, ya sea por una simple operación gráfica, puesto que se conoce la posición de cada intersección de meridianos y paralelos, ó ya calculando sus coordenadas por las fórmulas (6), aunque casi siempre basta el primer procedimiento. Todos los demás detalles referidos á los puntos trigonométricos se configuran como se explicó en la Topografía.

80.—La principal ventaja de las proyecciones cónicas consiste en que todos los meridianos y los paralelos ó sus elementos se cortan en ángulo recto, como se verifica en la tierra; pero con excepción del paralelo medio, todas las demás líneas resultan ligeramente alteradas en sus dimensiones. En una esfera los grados de longitud, contados en diversos paralelos, tienen extensiones proporcionales á los cosenos de sus latitudes, puesto que los radios de estos círculos son de la forma $R\cos.\varphi$; mientras que en la proyección sus variaciones son proporcionales á las de $\gamma-k$. La cantidad γ se considera como constante, y el valor de k varía con cada uno de los sistemas de proyección; pero en general asigna á los grados de paralelo un decrecimento que sigue una ley diversa que en la tierra. Estas alteraciones, lo mismo que las de los grados de latitud, ó sea de meridiano, y que ya he considerado, crecen ó se hacen más sensibles á medida que aumentan las diferencias de latitud; y por estos inconvenientes la proyección cónica se aplica de preferencia á la construcción de las cartas de aquellos países que se extienden más en el sentido de la longitud que de Norte á Sur. Un país que sólo abrace 8° ó 10° de latitud, por ejemplo, quedará muy bien representado en una carta cónica; porque en una zona de 4° ó 5° al Norte y al Sur del paralelo medio, la superficie del cono tangente se aleja tan poco de la tierra, que casi serán imperceptibles las deformaciones que origine la proyección.

De los tres medios que he dado á conocer para proyectar los paralelos, vimos que el segundo, que supone la proyección hecha desde el extremo del diámetro ecuatorial, da generalmente distancias un poco menores que los arcos del meridiano correspondientes; mientras que el tercer método, que las supone hechas desde el centro de la esfera, las produce algo mayores. Según esto, se comprende fácilmente que sería posible determinar en el plano del ecuador un punto tal, que proyectando desde él un arco del meridiano sobre la superficie cónica, la proyección resultase igual en extensión al arco mismo, ó en general, que guardase con éste una relación dada. [1] No desarrollo los cálculos, porque son largos y no ofrecen interés práctico; basta solamente concebir la posibilidad de determinar ese punto proyectante de cada paralelo para tener hasta cierto punto el fundamento de una modificación de la proyección cónica, que se ha tenido hasta ahora por arbitraria; pero que en rigor deja de serlo resolviendo el problema desde el punto de vista en que lo he considerado.

Esta modificación consiste en dar á los grados del meridiano sus verdaderas extensiones en la proyección. Si la tierra se supone esférica, las extensiones serán las mismas para iguales diferencias de latitud, y se calcularán por la fórmula siguiente en que δ expresa grados.

$$m = \text{arco}\, 1^\circ \times R\delta = (8.2418774)\, R\delta$$

Entonces se empleará m en lugar de k en las ecuaciones (3) ó (6), que sirven para calcular los radios de las proyecciones de los paralelos ó las coordenadas de sus intersecciones con los meridianos. Si se hace la construcción por el método del número 74, deberá dividirse el meridiano medio en partes iguales á m reducidas á la escala,

[1] Designando por x la distancia del centro de la esfera al punto en cuestión, he hallado que la relación que liga las cantidades k, φ, φ' y x está representada en la ecuación siguiente:

$$k = R\,\frac{R\,\text{sen.}\,\delta + x\,(\text{sen.}\,\varphi' - \text{sen.}\,\varphi)}{R\cos.\,\delta + x\cos.\,\varphi}$$

Por ella se ve que los tres métodos que he considerado son casos particulares de la fórmula, que corresponden á $x = \infty$, á $x = R$ y á $x = 0$.

Si se desea que k adquiera un valor dado m, despejaremos á x con esa condición, y resultará:

$$x = R\,\frac{R\,\text{sen.}\,\delta - m\cos.\,\delta}{m\cos.\,\varphi - R\,(\text{sen.}\,\varphi' - \text{sen.}\,\varphi)}$$

La cantidad δ es la diferencia de latitud $\varphi' - \varphi$ de los extremos del arco cuya extensión es k ó m.

y por los puntos de división se trazarán los paralelos como se dijo allí.

Cuando la escala de la construcción se presta á ello, si se quiere restituir á la tierra su verdadera forma, consideremos que desde el momento en que el meridiano se supone elíptico, la generatriz del cono tangente ya no es perpendicular al radio central, sino á la normal que corresponde á la latitud φ del contacto. Así, pues, la distancia de este paralelo al vértice del cono, ó lo que es lo mismo, el radio de su proyección, ya no se calculará por la fórmula (1), sino por la siguiente:

$$\gamma = N\cot.\,\varphi \qquad \text{(7)}$$

Los valores de m tampoco serán iguales entre sí, y deberán calcularse por la ecuación (19) del Capítulo I. La Tabla III, que termina el mismo Capítulo, los da para $\delta = 1^\circ$. Estas cantidades son las que deben sustituir á k en la construcción ó en el cálculo de las coordenadas.

Con esta modificación quedan destruídos los errores de las distancias de Norte á Sur, y la proyección consta de trapecios mixtilíneos de alturas iguales si se supone la tierra esférica, ó crecientes si se lleva en cuenta su elipticidad.

81.—Otra modificación que se ha hecho á la proyección cónica consiste en dar su verdadero tamaño á los grados de todos los paralelos; porque en el sistema que hasta ahora se ha explicado sólo el paralelo medio no sufre alteración por ser el del contacto. Basta para esto determinar los ángulos que he designado por V, no sólo para el paralelo medio, sino para todos los demás, con la condición de que el arco desarrollado tenga igual extensión á la que abraza en la tierra. Siendo, como antes, γ el radio de la proyección del paralelo medio, calculado por la fórmula (7), y m la extensión del arco del meridiano $\varphi' - \varphi$, el radio de la proyección del paralelo cuya latitud es φ' será $\gamma - m$. La extensión del arco de este paralelo que comprende $2\,L$ grados de longitud, tiene por expresión:

$$S = \frac{\pi}{90^\circ}\, L\, N\cos.\,\varphi'$$

y en la proyección cuyo radio es $\gamma - m$, será:

$$S = \frac{\pi}{90^\circ} V(\gamma - m)$$

de donde se obtiene por la eliminación de S:

$$V = L \frac{N \cos. \varphi'}{\gamma - m}$$

que representa el ángulo formado en el vértice del cono por los dos meridianos que á la latitud φ' abrazan L grados de longitud.

Se ve, pues, que adoptando esta modificación es preciso calcular el valor de V para cada paralelo, introduciendo la normal que corresponde á su latitud y el valor de m contado desde el paralelo medio. Hasta cierto punto esto equivale á suponer un cono tangente á la tierra en cada paralelo, y por esa razón á veces se denomina *policónica* esta proyección modificada, aunque con más generalidad se llama proyección *francesa;* porque para la construcción de la carta de Francia emplearon ese sistema los geógrafos de aquella nación.

Como los valores de V van variando de una latitud á otra, aun para los mismos valores de L, resulta que los meridianos no quedan ya rectilíneos, sino ligeramente curvos; pero la construcción no por eso es más difícil, pues fijando por sus coordenadas las intersecciones de meridianos y paralelos, se unen por pequeñas rectas todos los puntos de igual longitud en los diversos paralelos, y se obtienen así líneas poligonales con apariencia de curvas perfectas, las cuales representan las proyecciones de los meridianos. La figura 26ª manifiesta la proyección para una carta de la República construída de esa manera.

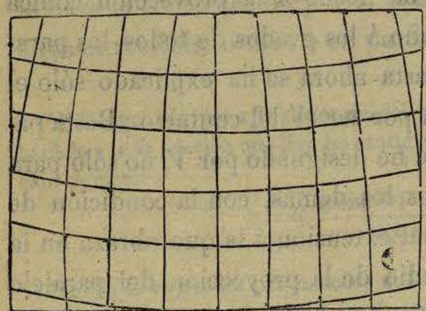

FIG. 26A

Este sistema se usa mucho en el día, porque no produce deforma-

ción sensible en la carta. Para facilitar sus aplicaciones, reunamos todas las fórmulas que sirven para calcular las coordenadas de los puntos de intersección de los meridianos y los paralelos, ó si se quiere, las coordenadas de un punto cuya latitud sea φ' y cuya longitud sea L.

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= N_0 \cot. \varphi \\ V &= L \frac{N \cos. \varphi'}{\gamma - m} \\ x &= (\gamma - m) \,\text{sen.}\, V \\ y &= m + x \tan. \frac{1}{2} V \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

En ellas N_0 designa la normal que corresponde á la latitud media φ, y N la correspondiente á cualquiera otra latitud φ'.

Por estas fórmulas calculé las tablas que corren impresas y sirvieron al Sr. García Cubas para dibujar la carta de la República que publicó hace algunos años. Para facilitarle el trabajo tomé por unidad la sexta parte de la distancia, contada en el meridiano, entre los paralelos de 15° y de 33°, á fin de referir los valores de x é y al tamaño que quisiera darse al dibujo. (Véase la memoria que acompaña á la carta general de la República.)

82.—**Proyecciones cilíndricas.**—Si se supone nula la cantidad designada por φ, que según se recordará, representaba la latitud del paralelo de contacto de la superficie cónica con la de la tierra, el radio de la proyección, suministrado por la fórmula (1) ó la primera de las (8) darán $\gamma = \infty$, lo cual indica que el cono se convierte en un cilindro. Este resultado se comprende desde luego, puesto que la condición $\varphi = 0$ expresa que el contacto tiene lugar en el ecuador, y en consecuencia las generatrices de la superficie circunscrita á la tierra, debiendo ser perpendiculares á los radios ecuatoriales, serán paralelos al eje polar del globo y determinarán una superficie cilíndrica de base circular. Desarrollando esta superficie, quedarán representadas las proyecciones de los meridianos por líneas rectas paralelas y equidistantes; y las de los paralelos al ecuador por líneas perpendiculares á estas últimas, á distancias variables entre sí, según el sistema de proyección que se adopte. El dibujo ofrecerá, pues, un conjunto de rectángulos de bases iguales y alturas desiguales.

Las tres maneras de proyectar los paralelos, que están representadas en las fórmulas (2), dan respectivamente, atendiendo á que en este caso se tiene $\delta = \varphi'$:

$$k = R\,\text{sen.}\,\varphi'$$
$$k = 2\,R\,\text{tan.}\,\frac{1}{2}\,\varphi'$$
$$k = R\,\text{tan.}\,\varphi'$$

Por estas expresiones se ve que los tres métodos alteran poco las dimensiones de los arcos del meridiano cuando es pequeña la latitud; pero que sucede lo contrario cuando φ' se acerca á valer 90°, en cuyo caso el primer método da proyecciones demasiado pequeñas, el segundo demasiado grandes, aunque no tanto como el tercero, que para $\varphi' = 90°$, produce $k = \infty$. De aquí se deduce que la proyección cilíndrica sólo puede servir para configurar con alguna aproximación una estrecha zona á un lado y otro del ecuador. Por lo general, se aplica este sistema á la construcción de las cartas celestes para representar las constelaciones ecuatoriales y zodiacales.

A pesar de los inconvenientes que ofrece la proyección cilíndrica en cuanto á la deformación que produce en las altas latitudes, es la más usada por los marinos para la construcción de sus cartas. La razón de esta preferencia proviene de que quedando representados los meridianos por líneas rectas y paralelas, el derrotero de un navío se podrá representar también por una línea recta. En efecto, la dirección en que se navega se determina por medio de la brújula, moviendo el timón de manera que aquel instrumento indique cierto azimut calculado de antemano y dependiente de las posiciones del punto de partida y del término del viaje; por consiguiente, la senda de la embarcación forma una curva llamada *loxodromia*, caracterizada por la propiedad de formar un mismo ángulo con todos los meridianos. Si, pues, las proyecciones de estos planos son líneas rectas, la de la loxodromia será también una recta trazada con el azimut deducido de las indicaciones de la brújula.

83.—En una esfera los grados de longitud contados sobre distintos paralelos tienen extensiones proporcionales á los cosenos de sus latitudes, puesto que su expresión es: $p = \text{arco}\,1° \times R\cos.\,\varphi$. La extensión de un grado del meridiano es: $m = \text{arco}\,1° \times R$, y por tanto la relación de estas extensiones será: $\frac{p}{m} = \cos.\,\varphi$. En la proyección cilíndrica el paralelismo de los meridianos hace invariables los grados de longitud, sea cual fuere la latitud del paralelo en que se cuenten; mas para conservar la relación $\frac{p}{m} = \cos.\,\varphi$ en que p es constante, el geógrafo inglés Mercator tuvo la idea de hacer variar los arcos del meridiano en razón inversa de los cosenos de las latitudes. Así, pues, dividiendo el valor de m por $\cos.\,\varphi$ se obtienen los grados crecientes de latitud para construir la proyección cilíndrica de Mercator representada en la fig. 27ª, y en la cual la relación de los grados de latitud, con los de longitud, es la misma que en una esfera. La modificación de Mercator se adopta comunmente para las cartas marinas y para los *planisferios* que representan toda la tierra, con excepción de los países muy inmediatos á los polos; pero además de las deformaciones, tiene el inconveniente de demandar una escala diferente para apreciar las distancias en cada zona.

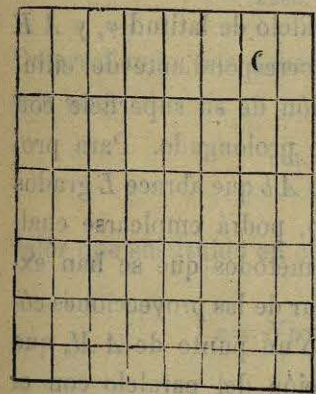

FIG. 27

Otra modificación de la proyección cilíndrica consiste en suponer iguales los grados de los meridianos y de los paralelos con la extensión que tienen los primeros á la latitud media del país que se desea representar. Entonces la proyección consta de una serie de cuadrados iguales como las cuadrículas que sirven para construir los planos topográficos; pero este sistema sólo puede aplicarse sin error notable para formar las cartas de países muy poco extensos, que no excedan, por ejemplo, de 2° ó 3° de longitud y latitud.

84.—Consideremos ahora un sistema de proyección muy fácil de construir y muy conveniente, á mi juicio, en las bajas latitudes, sobre todo para la representación de países más extensos de Norte á Sur que de Oriente á Poniente. Para esto, concibamos un cilindro tangente á la tierra en el meridiano medio del país que va á representarse, y supongamos prolongados los planos de los meridianos y los paralelos. Los primeros determinarán en el cilindro intersecciones elípticas cuyos ejes menores serán iguales al diámetro polar, y los segundos secciones terminadas por generatrices de la superficie cilíndrica. Luego que ésta se desarrolla, el meridiano medio quedará representado por una línea recta de una extensión igual á la que realmente tiene en la tierra; los demás meridianos por curvas que se construyen fácilmente, puesto que puede determinarse la distancia de cualquiera de sus puntos al meridiano medio; y por último, los paralelos por rectas perpendiculares á esta última línea.

Sea $A\,O\,M\,E$ (fig. 28ª) el plano de un paralelo de latitud φ, y $A\,B$ la generatriz correspondiente del cilindro, intersección de su superficie con la del paralelo prolongado. Para proyectar un arco $A\,b$ que abrace L grados de este círculo, podrá emplearse cualquiera de los métodos que se han expuesto al hablar de las proyecciones cónicas, tomando un punto de $A\,M$, que es la intersección del paralelo con el meridiano principal al cual es tangente el cilindro, y trazando desde él una línea á la extremidad b del arco. Así, por ejemplo, si se elige el centro C del paralelo mismo para hacer la proyección, el arco $A\,b$ quedará proyectado en $A\,B$. Designando por N la normal terrestre á la latitud φ, el radio del paralelo es $N \cos \varphi$, y la proyección $A\,B$ tendrá por valor:

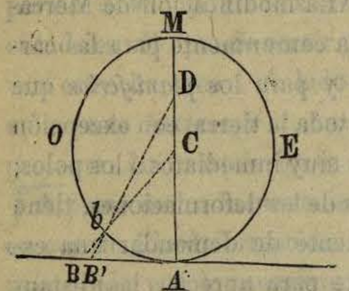

FIG. 28A

$$k = N \cos.\varphi \tan.L$$

puesto que L es el ángulo $A\,C\,b$ ó sea la longitud geográfica del punto b contada desde el meridiano medio $A\,M$.

Adoptando este sistema, las proyecciones de los arcos de cada pa-

ralelo serán proporcionales á sus tangentes; de manera que cuando el país comprenda varios grados de longitud, los grados de los paralelos tendrán en la carta mayor extensión que en la tierra, de donde resultarán deformaciones en las partes extremas del dibujo. Puede, sin embargo, escogerse en el plano del paralelo un punto D para proyectar cada arco, de tal modo que la proyección $A\,B'$ tenga una magnitud dada p. Basta para esto determinar en el triángulo rectángulo $A\,D\,B'$ el valor de $x = C\,D$ estableciendo la condición:

$$p = (N \cos.\varphi + x) \tan.D$$

En el triángulo $C\,D\,b$ se tiene, además:

$$x \operatorname{sen}.D = N \cos.\varphi \operatorname{sen}.(L - D)$$

Desarrollando esta ecuación y dividiéndola por cos. D, suministra esta otra:

$$\tan.D = \frac{N \cos.\varphi \operatorname{sen}.L}{N \cos.\varphi \cos.L + x}$$

valor que sustituído en el de p produce el siguiente de x:

$$x = N \cos.\varphi \frac{N \cos.\varphi \operatorname{sen}.L - p \cos.L}{p - N \cos.\varphi \operatorname{sen}.L}$$

Si se quiere que la proyección p sea precisamente igual al arco correspondiente $A\,b$ del paralelo, sustituiremos su valor, que tomando por unidad el arco de 1° y expresando á L en grados, es $p = L\,N \cos.\varphi$. Por la sustitución resultará, pues:

$$x = N \cos.\varphi \frac{\tan.L - L}{L - \operatorname{sen}.L} \cos.L$$

Se comprende que en manera alguna es necesario determinar el valor de x que corresponde á cada arco de longitud L, y el cálculo anterior sólo tiene por objeto demostrar la posibilidad de hacer la proyección de esa manera sin alterar las dimensiones de los arcos, ó si se quiere, el de indicar el fundamento de una modificación que se hace á la proyección cilíndrica tangente al meridiano. Esta consiste en dar sus verdaderas dimensiones á los grados de los paralelos, haciendo la construcción con la mayor facilidad de la manera que voy á exponer.

Hacia el centro del papel trácese una línea que represente el meridiano medio ó principal. Con arreglo á la escala divídase esta línea en partes proporcionales á las extensiones de los grados del meridiano correspondientes á las latitudes que abraza el país. Estos valores son los que constan en la Tabla del número 23 para las latitudes de la República. Por los puntos de división levántense perpendiculares al meridiano medio, las cuales representan las proyecciones de los paralelos; y sobre cada uno tómense distancias iguales á los grados de longitud, según sea la latitud del paralelo en que se cuenten, y que para la República constan igualmente en la Tabla citada. Finalmente, únanse los puntos de cada paralelo que correspondan á la misma longitud, y se obtendrán así las proyecciones de los demás meridianos.

La figura 29ª presenta la proyección para una carta de México construída según este sistema. Por ella se ve que en una zona de algunos grados al Oriente y al Poniente del meridiano central, casi no se produce deformación alguna, y que ésta sólo comienza á notarse hacia los extremos más distantes en longitud, á causa de que los meridianos van siendo más y más oblicuos respecto de los paralelos, haciendo crecer, por consiguiente, los grados de latitud.

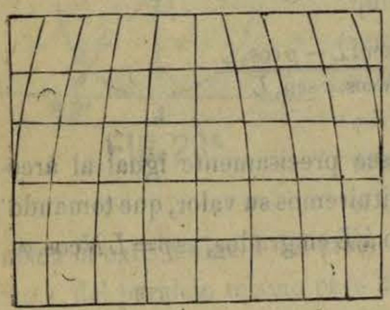

FIG. 29 A

A la facilidad con que puede construirse la proyección cilíndrica tangente al meridiano, puede agregarse otra ventaja que ofrece en las bajas latitudes, cual es la de hacer poco convergentes los meridianos, y ocasionar, en consecuencia, menos deformación hacia el Este y el Oeste, que la que produce cuando se aplica á la representación de países de latitudes considerables.

En efecto, el decremento de los grados de paralelo, es próximamente proporcional al coseno de la latitud, puesto que los radios de estos círculos son de la forma $N \cos. \varphi$; y como los cosenos de los ángulos pequeños no decrecen con mucha rapidez, resulta que las proyecciones de los meridianos laterales tienen respecto de los paralelos una oblicuidad menor que en las altas latitudes. Por las razones expuestas, me parece que este sistema de proyección es muy propio para construir las cartas de nuestros Estados del litoral que se extienden en latitud más que en longitud, y aun para la de toda la República, que quedaría bastante bien representada.