A	8.512179	B	0.9684	C	8.509611
k	4.681121	k^2	9.3622	k	4.681121
cos. u	9.965328−	sen.^2u	9.1690	sen. u	9.584507
				cos. φ'	−9.973958
	3.158628−		9.4996	D	2.801281
	−1440″.88		−0″.32	sen. $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$	9.530798
				c	2.332079
	−24′00″.88				
	− 0 .32				
$d=$	−24′ 1″.2	$D=+$	10′32″.82	$c=+$	3′34″.82
$\varphi=$	20° 2 40 .37	$L=$	−0° 3 1 .11	$180°+u=$	337°24′31″.3
$\varphi'=$	19°38′39″.17	$L'=$	+0° 7′31″.71	$u'=$	337°28′ 6″.12

Todos estos resultados concuerdan bien con los que se han obtenido antes por medio de los datos primitivos referentes al punto A.

CAPITULO VIII.

CONSTRUCCIÓN DE LAS CARTAS GEOGRÁFICAS.

73.—La superficie de la tierra no es *desarrollable*, ó susceptible de extenderse de modo que coincida con un plano en todos sus puntos, como lo son, por ejemplo, la superficie de un cono, que extendida en plano produce un sector, y la de un cilindro, que desarrollada origina un cuadrilátero. De aquí resulta que para representar sobre el papel la carta geográfica de un continente, de una nación, etc., es preciso recurrir á ciertas construcciones geométricas convencionales llamadas *proyecciones*.

Estas pueden clasificarse, en general, en dos grupos: el uno comprende las proyecciones *por desarrollo*, y el otro las proyecciones *perspectivas*. Las primeras consisten en sustituir á la superficie del globo otra superficie desarrollable; en hacer en ella la configuración de los objetos de la tierra por medio de ciertas consideraciones geométricas; y en desarrollarla, por último, para que aparezca en plano la forma así obtenida. Las proyecciones perspectivas se obtienen suponiendo que desde un punto cualquiera se dirigen visuales á todos los objetos que deben figurar en la carta; cortando en seguida todas estas visuales por medio de un plano; y señalando en este el lugar preciso en que es cortado por cada una de ellas. De este modo resulta una imagen más ó menos fiel de la situación relativa de los objetos.

Casi en todas las construcciones de cartas geográficas se supone esférica la tierra; porque el ligero error que trae consigo esta hipótesis, es generalmente inferior al que producen las deformaciones inevitables que provienen de la proyección misma, sea cual fuere el sistema que se adopte. Indicaré, sin embargo, las modificaciones que deben hacerse á las proyecciones de la tierra supuesta esférica para restituirle la forma elipsoidal, cuando la escala de la construcción sea bastante grande para que se hagan perceptibles las diferencias originadas por la esfericidad hipotética.

Las proyecciones perspectivas se adoptan por lo regular para las cartas de vastas regiones, como todo un continente; y con especialidad para la construcción del *Mapa-Mundi*, que es la representación de la tierra entera, dividida en dos hemisferios. Para las cartas de superficies menos extensas se emplean de preferencia las proyecciones por desarrollo, de las que voy á ocuparme únicamente á causa de la mayor frecuencia de su uso, remitiendo al lector que desee instruirse en la construcción de las perspectivas, á los tratados de Geodesia de Mr. Francœur y de Mr. Salneuve, ó al Manual de Construcción y dibujo de cartas geográficas de Mr. Perrot. (Colección de Manuales de Roret).

74.—**Proyecciones cónicas.**— Sean bb' y cc' (fig. 22ª) los paralelos de las latitudes extremas del país cuya carta se va á construir, y AA' el paralelo medio. Si consideramos una superficie cónica AVA' originada por la tangente en A, esta superficie envolverá á la tierra tocándola en todos los puntos del paralelo AA', y se acercará á la del globo lo suficiente, en una zona bc de algunos grados, para que no resulte gran error al configurar en la zona cónica correspondiente los detalles de la esférica. Desarrollando después la primera, tendremos una representación bastante fiel de lo que contiene la segunda. Fácilmente se comprende que sería muy complicado, y además innecesario, hacer la

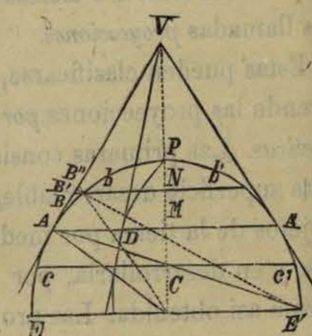

FIG. 22ª

proyección de cada uno de los puntos del terreno; pero si conseguimos proyectar únicamente los meridianos y los paralelos terrestres que pasen por ciertos lugares no muy distantes entre sí, todos los demás objetos se podrán representar en seguida por medio de sus posiciones geográficas, que aprendimos á calcular en el Capítulo precedente, y que, como se recordará, se refieren á meridianos y paralelos. No me ocuparé, pues, por ahora, más que de las proyecciones de los meridianos y los paralelos, que supondré equidistantes en el terreno por proyectar, de grado en grado, por ejemplo.

Según esto, si suponemos prolongado el plano de un meridiano cualquiera PD, su intersección con la superficie del cono tangente será una de sus generatrices VD, la cual tomaremos por proyección de aquel plano, y de igual manera obtendremos las de los demás, que estarán equidistantes entre sí, puesto que admitimos que lo están los meridianos que representan. Antes de indicar el modo de proyectar los paralelos, demos una idea de la manera de desarrollar el cono. Con un radio proporcional á VA, cuyo valor daré después, trácese un arco de círculo $A'a$ (fig. 23ª) que representará el paralelo medio sin alteración en cuanto á su tamaño, porque es común tanto al globo terrestre como al cono tangente. Tomando, pues, $A'a$ proporcional á la extensión lineal del arco del paralelo medio en la tierra, y dividiéndolo en tantas partes iguales como grados de longitud abraza el país que se va á representar, se tendrán otros tantos puntos comunes al paralelo medio y á las proyecciones de los meridianos cuyos planos forman entre sí ángulos de un grado, ó lo que es lo mismo, distantes un grado en longitud. Como estas proyecciones deben pasar también por el vértice del cono, puesto que son generatrices suyas, para obtenerlas no se necesitará más que trazar radios desde el centro V á cada uno de los puntos de división del paralelo medio $A'a$.

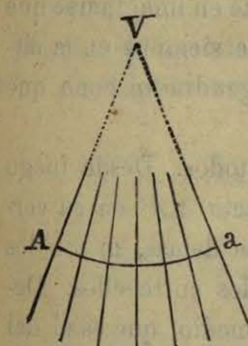

FIG. 23ª

Para calcular el radio VA de la proyección, tenemos que en el triángulo rectángulo VAC (fig. 22ª) llamando φ la latitud del paralelo en que el cono es tangente á la esfera, el ángulo $AVC = ACE$ es por consiguiente φ, y resulta:

$$VA = \gamma = R \cot.\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Puede tomarse por R el radio medio de la tierra para disminuir el error que proviene de la supuesta esfericidad del globo terrestre.

75.—Veamos ahora la manera de proyectar los paralelos. Si suponemos prolongado el plano del paralelo bb' quedará cortada la superficie cónica según un círculo que tiene BN por radio, y que puede tomarse por proyección del paralelo. Entonces el arco Ab del meridiano se proyectará en AB.

Puede hacerse también la proyección suponiendo que la cuerda $E'b$ gira al derredor del eje de la tierra, manteniendo siempre su extremo E' en el ecuador y el punto b sobre el paralelo. Describirá así una superficie cónica cuya intersección con el cono tangente será un círculo, y el arco Ab se proyectará en AB'.

Otra manera de proyectar los paralelos consiste en imaginarse que el radio Cb gira al derredor del eje apoyándose siempre en la circunferencia del paralelo, con lo que también engendra un cono que proyecta el arco AB en AB''.

Vamos á examinar cada uno de estos tres métodos. Desde luego cualquiera de ellos proyecta el paralelo de contacto AA' en su verdadero tamaño; pero no sucede lo mismo con los demás, ni con los arcos de meridiano, tales como Ab, comprendidos entre ellos. Designando siempre por φ la latitud del paralelo medio, que es el del contacto, por φ' la de otro cualquiera bb', y por k el tamaño de la proyección del arco $Ab = \varphi' - \varphi$, tendremos en el primer método:

$$AB = k = \frac{MN}{\cos.\varphi} = \frac{NC - MC}{\cos.\varphi}$$

Siendo $NC = R\,\text{sen.}\,\varphi'$ y $MC = R\,\text{sen.}\,\varphi$, resulta:

$$k = \frac{R(\text{sen.}\,\varphi' - \text{sen.}\,\varphi)}{\cos.\varphi}$$

y por último:

$$k = 2R\frac{\cos.\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}{\cos.\varphi}\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (P)$$

En el segundo método k será igual á AB', y en el triángulo $AB'E'$ los valores de los ángulos son:

$$A = 90° - \frac{1}{2}\varphi \qquad B' = 90° - \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi) \qquad E' = \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$$

Tenemos, además, $k = AE'\frac{\text{sen.}\,E'}{\text{sen.}\,B'}$; y como la cuerda es

$$AE' = 2R\cos.\frac{1}{2}\varphi$$

resultará sustituyendo:

$$k = 2R\frac{\cos.\frac{1}{2}n}{\cos.(\frac{1}{2}\varphi' - \varphi)}\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (Q)$$

Finalmente, para el tercer método en que $k = AB''$, el triángulo rectángulo $AB''C$ da:

$$k = R\tan.(\varphi' - \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (R)$$

Si, para comparar los valores obtenidos en los tres casos, hacemos $\varphi' - \varphi = \delta$, podremos escribirlos así:

$$\left.\begin{aligned} k &= 2R\frac{\cos.(+\frac{1}{2}\delta)}{\cos.\varphi}\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\delta \\ k &= 2R\frac{\cos.\frac{1}{2}\varphi}{\cos.\frac{1}{2}(\varphi - \delta)}\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\delta \\ k &= R\tan.\delta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Expresando á δ en partes del radio, la verdadera extensión del arco AB es $R\delta$. Además, la relación $2R\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\delta$ es siempre un poco menor que $R\delta$, por lo cual, si δ es positiva, esto es, si φ' es mayor que φ, el factor de $2R\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\delta$ en la primera fórmula es menor que la unidad; y por consiguiente la proyección k será más pequeña que el arco $AB = R\delta$. Lo mismo sucede en el segundo método, aunque el error es menos considerable puesto que los cosenos de ángulos pequeños varían con lentitud, y se ve que en la fórmula entran $\cos.\frac{1}{2}\varphi$

y cos. $\frac{1}{2}(\varphi-\delta)$. El tercer método da la proyección más grande que el arco, porque el incremento de las tangentes es mayor que el de los ángulos; pero en este caso el error, ó por mejor decir, la diferencia entre el arco y su proyección, es en general más pequeña que en los otros dos procedimientos, á causa de que la fórmula no contiene otro factor que contribuya á aumentarla.

Si φ' es menor que φ, δ es negativa; y entonces las tres fórmulas darán, en general, proyecciones numéricamente mayores que los arcos del meridiano que representan; pero los incrementos serán, por lo regular, menores y más uniformes usando la última.

Comparando ahora los tres métodos bajo el aspecto del error que ocasionan en la extensión de los arcos del paralelo, veremos que todos ellos aumentan el tamaño de los grados, puesto que el radio de la sección del cono es siempre mayor que Nb, radio del paralelo; pero el tercer procedimiento es el que produce menos error; porque de las tres proyecciones de b, el punto B'' es el más inmediato al eje del cono, y por consiguiente, la sección que pasa por ese punto tiene un radio que es el que más se acerca á Nb.

76.—De estas consideraciones se deduce que la proyección de los paralelos, hecha desde el centro de la esfera, es la que altera menos las extensiones de los arcos del meridiano y de los paralelos, y por tanto, la que origina menor deformación en las posiciones relativas de los objetos situados en la superficie de la tierra.

Presentemos un ejemplo numérico de los cálculos, suponiendo que la latitud del paralelo medio es $\varphi = 23° 30'$, la de otro $\varphi' = 29° 00'$ y la escala con que se va á construir la proyección, de $\frac{1}{1000000}$. El radio medio de la tierra es $R = 6366738^{m}$.

$\varphi' =$	$29° 00'$			$\frac{R}{1000000}$......	0.80392
$\varphi =$	$23\ \ 30$			arco 1°........	8.24188
				5°.5............	0.74036
$\varphi' + \varphi =$	$52\ \ 30$	$\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi) =$	$26° 15'$		
$\varphi' - \varphi = +$	$5\ \ 30$	$\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = +$	$2\ \ 45$	$R\delta$........	9.78616
$\varphi - \delta =$	$18\ \ 00$	$\frac{1}{2}(\varphi - \delta) =$	$9\ \ 00$		$R\delta = 0^{m}.6112$

$\frac{R}{1000000}$......	0.80392	....	0.80392	....	0.80392
2................	0.30103	....	0.30103	tan. δ......	8.98358+
cos. $\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi)$.	9.95273	cos. $\frac{1}{2}\varphi$............	9.99080		
sen. $\frac{1}{2}\delta$.........	8.68104+	....	8.68104+	k......	9.78550+
cos. φ...........	−9.96240	cos. $\frac{1}{2}(\varphi-\delta)$......	−9.99462		
k.........	9.77632	k.........	9.78217+		
	$k = 0^{m}.5975$		$k = 0^{m}.6056$		$k = 0^{m}.6131$

Comparando cada resultado con el valor $R\delta$ del arco, vemos que el primer método produce $0^{m}.0137$ de error, el segundo $0^{m}.0056$ ambos por defecto, y el tercero sólo $0.^{m}0019$ por exceso. Si suponemos $\varphi = 18° 00'$ á fin de que δ sea numéricamente la misma que en el caso anterior, se obtendrán los resultados:

$$k = -0^{m}.6230 \qquad k = -0^{m}.6178 \qquad k = -0^{m}.6131$$

cuyos errores son respectivamente $0^{m}.0108$, $0^{m}.0056$ y $0^{m}.0019$. Se ve, pues, que á pesar de ser la escala bastante grande para una carta geográfica, y δ de 5°.5, no llega á $0.^{m}002$ el error que produce el tercer método.

77.—Sea cual fuere el sistema de proyección que se adopte, al desarrollar la superficie cónica resultan circulares los paralelos; y como el radio con que debe trazarse el paralelo medio, es $\gamma = R \cot. \varphi'$, el radio de la proyección de otro paralelo cualquiera de latitud φ', será:

$$\gamma' = R \cot. \varphi - k = \gamma - k \quad \text{.........................} \quad (3),$$

puesto que esta ecuación expresa la distancia de la proyección B, B' ó B'' al vértice del cono.

Falta ahora conocer el ángulo que forman, en el vértice del cono ya desarrollado, las generatrices que representan las proyecciones de los meridianos. Designando por $2L$ el número de grados de longitud que abraza el país cuya carta se va á construir, tendremos que en el paralelo medio cuyo radio es $AM = R \cos. \varphi$, la extensión de $2L$ grados es:

$$S = \frac{\pi}{90°} L R \cos. \varphi$$

Pero como el paralelo medio queda representado en la proyección de su verdadero tamaño, aunque trazado con otro radio que es $\gamma = R \cot. \varphi$, si designamos por $2\,V$ el ángulo formado por las proyecciones de los meridianos extremos, se tendrá este otro valor:

$$S = \frac{\pi}{90^\circ}\, V R \cot. \varphi$$

de donde eliminando á S se obtiene:

$$V = L \operatorname{sen}. \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Con estos datos, veamos el modo de construir la proyección. Al explicar la manera de hacer el desarrollo de la superficie cónica, se dijo cómo podía trazarse el paralelo medio, y nada sería más fácil que trazar los demás de igual manera, puesto que se conocen sus radios $\gamma' = \gamma - k$; pero este método gráfico raras veces puede aplicarse, porque la escala casi nunca será tan pequeña que permita describir arcos de círculo desde un punto V (fig. 23ª), que está tanto más distante cuanto menor sea la latitud de los paralelos. Voy á indicar otro procedimiento.

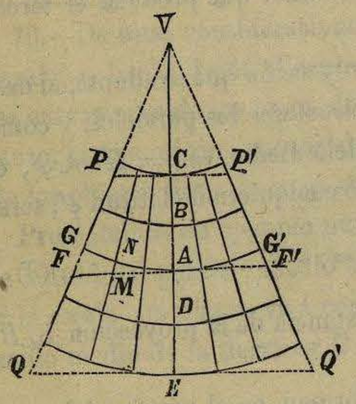

FIG. 24ª

Siendo $\frac{1}{r}$ la escala que se haya adoptado, los valores de γ, deben dividirse por r; ó mejor, al hacer los cálculos, se dividirá por r el radio R de la tierra, con el cual todos los demás valores resultarán ya reducidos á la escala. En el punto A (fig. 24ª), que supongo ser el centro del papel, trácense las dos rectas CE y FF' pendiculares entre sí. La primera representa la proyección del meridiano medio ó central, y la segunda es una tangente á la del paralelo medio, que va á servirnos para trazar esta curva.

Tómese una distancia AF, cuyo valor, como lo indica la figura,

se calcula por medio de la ecuación: $X = VA \tan. AVF = \gamma \tan. V$, la cual, atendiendo á la expresión (4) dará para AF:

$$X = \gamma \tan. (L \operatorname{sen}. \varphi)$$

y en el punto F así determinado, fórmese por medio de una tabla de cuerdas el ángulo $AFV = 90^\circ - V = 90^\circ - L \operatorname{sen}. \varphi$. La misma construcción se hará hacia la parte oriental del meridiano medio para trazar por F' la proyección del otro meridiano extremo. En general, todo lo que se diga respecto de la región occidental debe aplicarse á la oriental, por ser la construcción simétrica de uno y otro lado de CE, de suerte que cada línea tendrá su correspondiente, que se establece con los mismos valores numéricos.

Para situar el punto G del paralelo medio, llamando Y la distancia FG, se tiene:

$$Y = VF - \gamma = \frac{\gamma}{\cos. V} - \gamma = \frac{\gamma(1 - \cos. V)}{\cos. V} = \frac{2\gamma \operatorname{sen.}^2 \frac{1}{2} V}{\cos. V}$$

ó si se quiere, introduciendo el valor de X, resulta:

$$Y = X \tan. \frac{1}{2} V$$

Los demás puntos del mismo paralelo, de grado en grado de longitud, por ejemplo, se establecen haciendo sucesivamente $L = 1^\circ$, 2°, 3°, etc., en la fórmula (4), y se tendrán los correspondientes de V formados por las proyecciones de los meridianos distantes 1° en longitud, con el meridiano medio. En seguida se calcula la $X = AM$ y la $Y = MN$ para cada punto N, por las fórmulas:

$$\left.\begin{array}{l} X = \gamma \tan. V \\ Y = \gamma \tan. V \tan. \frac{1}{2} V \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

formando antes en M el ángulo $90^\circ - V$. De este modo se obtienen tantos puntos como se quiera, los cuales unidos después por rectas, formarán una línea poligonal que se confunde con el arco de círculo, con tanto menos error cuanto más pequeño es L. Creo que $L = 1^\circ$ es en todos casos lo suficiente para que la serie de puntos establecidos presenten la apariencia de un arco perfecto. Si la escala de la construcción es excepcionalmente grande, puede reducirse la equidistancia en longitud L de los meridianos á $30'$, á $15'$, etc., que es lo conveniente cuando la carta comprende una extensión comparativamente pequeña.

Cualquiera otro paralelo de latitud φ' se establece tomando sobre los meridianos las distancias AB, AC, AD, AE, etc., iguales á los valores de k dados por aquella de las ecuaciones (2) que corresponda al método de proyección que se haya adoptado, y que comunmente es el tercero.

78.—Si se teme que la construcción de los ángulos complementarios de V en los extremos de las X produzca algún error por ser muy grande la escala de la carta, es preferible proceder de esta otra manera. Llamemos como antes φ la latitud media, φ' la del paralelo C más septentrional y φ'' la del meridional E. Después de establecido el punto A en el centro de la carta y el meridiano medio CE, tómense las distancias AC y AE, que no son otra cosa más que los valores de k correspondientes á φ' y φ''. En los puntos C y F levántense las perpendiculares PP' y QQ', sobre las que se tomarán:

$$CP=(\gamma-k)\tan. V$$
$$EQ=(\gamma-k')\tan. V$$

y uniendo los puntos P y Q se obtendrá la proyección de uno de los meridianos extremos. Lo mismo se hace para cada uno de los demás empleando el valor de V correspondiente. Finalmente, uno de los paralelos extremos E se traza como ya se ha dicho, y los otros por medio de los valores de k que correspondan á sus latitudes.

Se podría emplear también el valor de γ, radio de la proyección del paralelo medio, en la ecuación de este círculo referido á su centro V, la cual da:

$$x=\pm\sqrt{(\gamma+y)(\gamma-y)}$$

Atribuyendo á y diversos valores comprendidos entre γ y $\gamma\cos. V$, el primero de los cuales corresponde al punto A y el segundo al extremo G, se tendrían cuantos puntos intermedios se quisiesen.

79.—Demos ahora un método general para construir por puntos

los meridianos y los paralelos. Sea A (fig. 25ª) el centro de la carta, y tomemos por ejes de coordenadas las líneas AV y AF. Llamando x é y las coordenadas en un punto M cuya longitud sea L y cuya latitud sea φ, tendremos:

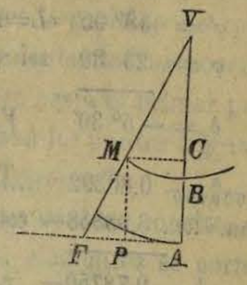

FIG. 25

$$AB=k \qquad AVM=V=L\,\text{sen.}\,\varphi$$
$$\gamma=R\cot.\varphi \qquad MV=\gamma-k$$

y entonces los valores de $AP=CM=x$ y de $MP=y$, serán:

$$x=(\gamma-k)\,\text{sen.}\,V$$

$$y=k+BC=k+2(\gamma-k)\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}V$$

Introduciendo el valor de x en el de y con el fin de evitar el cuadrado de sen $\frac{1}{2}V$, las coordenadas son:

$$\left.\begin{array}{l} x=(\gamma-k)\,\text{sen.}\,V \\ y=k+x\tan.\frac{1}{2}V \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

Las cantidades que entran en estas fórmulas dependen de la longitud y de la latitud de M, por lo cual este punto representa la proyección de la intersección del meridiano de longitud L con el paralelo de latitud φ'. Así es que para el mismo valor de φ', haciendo variar á L de grado en grado se tendrán puntos del mismo paralelo. Adoptando en seguida otros valores de φ' y haciendo variar de nuevo á L, resultarán otros paralelos divididos también de grado en grado. En consecuencia sólo faltará unir por líneas rectas los puntos de igual latitud para obtener los paralelos, y los de igual longitud para trazar los meridianos.

Para una carta de México, que está próximamente comprendido entre los paralelos de 15° y 33°, tomaremos $\varphi=23°\,30'$ por latitud media, y propongámonos calcular las coordenadas de la intersección