ó cubra del todo un país, aun cuando el objeto sea el de servir de apoyo á grandes operaciones topográficas; pues por lo regular sólo se establecen cadenas paralelas de Norte á Sur y de Oriente á Poniente ligadas entre sí para que formen un conjunto bien enlazado. El calculador debe proceder de manera que se procure comprobaciones en aquellos lados que sean comunes á dos cadenas contiguas, atendiendo siempre á las condiciones geométricas de la figura. [1]

La fórmula que he desarrollado (Tomo I, número 92) para hacer concordar dos bases, ó en general, los cálculos que se refieren á un mismo lado, se aplica también á la Geodesia con el mismo objeto. Igualmente es aplicable á una triangulación geodésica el procedimiento que expuse para corregir los cálculos preliminares y los que hayan partido de una base errónea (Tomo I, números 93 y 94).

También importa advertir que siempre que se ofrezca combinar los ángulos de una cadena geodésica, deben corregirse por la tercera parte del exceso esférico del triángulo á que pertenezcan; pues hemos visto que esta es la condición indispensable, según el teorema de Legendre, para ejecutar los cálculos como si se tratase de triángulos planos, Así, para reducir á la línea recta una base que se haya medido en dos ó más segmentos que formen entre sí ángulos muy obtusos (Tomo I, número 27), para determinar la posición de un punto por medio de la observación de los ángulos entre tres ó más vértices (Tomo I, números 72 y 101), etc., es preciso calcular el exceso esférico del triángulo de que forme parte cada uno de los ángulos que han de entrar en la combinación, y antes de hacerla, restarles la tercera parte de esa cantidad.

[1] Las personas que deseen más amplia instrucción respecto del mejor modo de satisfacer simultáneamente las diversas condiciones geométricas de una figura, pueden consultar la obra de Gauss, titulada: "*Suplementum theoriæ combinationis, etc.*," Gottingen, 1828. Galloway, en las "*Memoirs of the Astronomical Society for* 1844", ha presentado aplicaciones muy interesantes de esta materia á la triangulación de Inglaterra. En la publicación que anualmente se hace en los Estados Unidos con el título de "*Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey,*" en el volumen correspondiente á 1854, consta detalladamente esa teoría con numerosas aplicaciones. Por desgracia la extensión de la materia no permite su exposición en una obra elemental.

CAPITULO VII.

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS DE LOS VÉRTICES.

70.—El conocimiento de las coordenadas geográficas de las estaciones trigonométricas suministra los medios de asignar á la cadena la posición que realmente ocupa sobre el globo. La determinación de la latitud y de la longitud de un punto, así como la del azimut de una línea, constituyen las aplicaciones más importantes de la Astronomía á la Geodesia; pero se comprende fácilmente que no es necesaria la medida directa de esos elementos para cada uno de los vértices; porque conocida la posición geográfica de uno solo y el azimut de un lado, es posible situar las demás estaciones y orientar la cadena, por el enlace íntimo que existe entre todas sus partes. Sin embargo, como es interesante conocer la posición geográfica de cada uno de los vértices trigonométricos para poderlos fijar en la carta independientemente unos de otros, y sería muy dilatada y casi impracticable la medida directa de todas ellas por procedimientos astronómicos, vamos á exponer el método que debe seguirse para calcular las posiciones, conociendo la de un punto por lo menos y el azimut de un lado, datos que suponemos obtenidos por observaciones astronómicas directas, y de las cuales me ocuparé en la última parte de este libro.

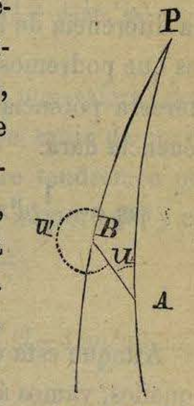

FIG 20^A

Diferencias de latitud.—Sea $BA = k$ (fig. 20ª) un lado de la triangulación, P el polo de la tierra y PA, PB los meridianos de las estaciones A y B. Supongamos conocida la longitud L del punto A y su latitud φ, cuyo complemento llamado *colatitud*, es el arco PA de su meridiano. También suponemos conocido el azimut de B, que es $u = PAB$, admitiendo como en la Topografía que los azimutes se cuentan desde 0° hasta 360° partiendo del Norte hacia el Oeste. Con estos datos vamos á determinar la longitud L' y la latitud φ' de B, así como el azimut inverso u' que es el de A tal como se observaría en B.

Llamando θ la amplitud del lado k, y suponiendo por ahora que el triángulo PAB pertenece á una esfera cuyo radio es la unidad, se tiene:

$$\cos. PB = \text{sen.}\,\varphi \cos.\theta + \cos.\varphi\,\text{sen.}\,\theta \cos. u$$

Si designamos por d la diferencia de latitud $\varphi' - \varphi$ de los puntos B y A, tendremos también:

$$\cos. PB = \cos.(90° - \varphi') = \cos.[90° - (\varphi + d)] = \text{sen.}(\varphi + d)$$

por lo que igualando, se obtiene:

$$\text{sen.}(\varphi + d) = \text{sen.}\,\varphi \cos.\theta + \cos.\varphi\,\text{sen.}\,\theta \cos. u$$

La amplitud θ, por pertenecer á una línea geodésica, y por ser d la diferencia de latitud de sus extremos, son arcos muy pequeños; así es que podremos sustituir las series de sus senos y cosenos hasta la tercera potencia al desarrollar la ecuación anterior, que en consecuencia dará:

$$\text{sen.}\,\varphi - \frac{1}{2} d^2 \text{sen.}\,\varphi + d \cos.\varphi - \frac{1}{6} d^3 \cos.\varphi = \text{sen.}\,\varphi - \frac{1}{2} \theta^2 \text{sen.}\,\varphi +$$
$$+ \theta \cos.\varphi \cos. u - \frac{1}{6} \theta^3 \cos.\varphi \cos. u$$

Aunque esta ecuación es de tercer grado, como d y θ son muy pequeños, vamos á resolverla por aproximaciones sucesivas, despejando primero á la primera potencia de d, para obtener:

$$d = \theta \cos. u - \frac{1}{2} (\theta^2 - d^2) \tan.\varphi - \frac{1}{6} (\theta^3 \cos. u - d^3)$$

Desechando los términos de segundo y tercer orden, tendremos por primera aproximación:

$$d = \theta \cos. u$$

Sustituyendo este valor aproximativo en el término de segundo orden y desechando el de tercero, resulta por segunda aproximación:

$$d = \theta \cos. u - \frac{1}{2} \theta^2 \text{sen.}^2 u \tan.\varphi$$

Finalmente, introduciendo este valor más exacto en los términos de segundo y tercer orden sin apreciar más que hasta la tercera potencia de θ, se obtiene:

$$d = \theta \cos. u - \frac{1}{2} \theta^2 \text{sen.}^2 u \tan.\varphi - \frac{1}{2} \theta^3 \cos. u\, \text{sen.}^2 u \tan.^2 \varphi - \frac{1}{6} \theta^3 \cos. u\, \text{sen.}^2 u$$

ó bien:

$$d = \theta \cos. u - \frac{1}{2} \theta^2 \text{sen.}^2 u \tan.\varphi - \frac{1}{6} \theta^2 \cos. u\, \text{sen.}^2 u (1 + 3 \tan.^2 \varphi)$$

Para pasar de la esfera que tiene la unidad por radio á la osculatriz al elipsoide cuyo radio es R', sabemos que $\theta = \frac{k}{R'}$, y se tendrá sustituyendo:

$$d = \frac{k \cos. u}{R'} - \frac{k^2 \text{sen.}^2 u \tan.\varphi}{2R'^2} - \frac{k^3 \cos. u\, \text{sen.}^2 u}{6R'^3} (1 + 3 \tan.^2 \varphi)$$

Esta fórmula daría la diferencia de latitud sobre una esfera; pero como este arco debe contarse en el meridiano, cuyo radio de curvatura es ρ, para que convenga al elipsoide terrestre tendremos que multiplicar por $\frac{R'}{\rho}$, según lo que se demostró en el número 28; y expresando por último en segundos el arco d, resulta:

$$\varphi' - \varphi = d = \frac{k \cos. u}{\rho\, \text{sen.}\, 1''} - \frac{k^2 \text{sen.}^2 u \tan.\varphi}{2R' \rho\, \text{sen.}\, 1''} - \frac{k^3 \cos. u\, \text{sen.}^2 u}{6R'^2 \rho\, \text{sen.}\, 1''} (1 + 3 \tan.^2 \varphi) \ldots\ldots (1)$$

Esta ecuación suministra la diferencia de paralelos con cuanta exactitud se necesita aun para lados geodésicos muy grandes; pero el último término tiene un valor casi insensible para las líneas geodésicas comunes, especialmente en las bajas latitudes. Suponiendo $k = 100000^{m}$, $u = 45°$ y $\varphi = 30°$, el tercer término da un valor que no llega á $0''.1$; y así es que podrá desecharse en la mayor parte de los casos, bastando sólo con la segunda aproximación, á saber:

$$\varphi' = \varphi + \frac{k \cos. u}{\rho\, \text{sen.} 1''} - \frac{k^2 \text{sen.}^2 u \tan. \varphi}{2R' \rho\, \text{sen.} 1''}.$$

También se puede tomar la normal N por R' en el segundo término que es siempre pequeño, y haciendo:

$$A = \frac{1}{\rho\, \text{sen.} 1''} \qquad B = \frac{0.5 \tan. \varphi}{N \rho\, \text{sen.} 1''}$$

tendremos en último resultado:

$$\varphi' = \varphi + A k \cos. u - B k^2 \text{sen.}^2 u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

En la Tabla que va en una de las páginas siguientes constan los logaritmos de A y B, que he calculado para las latitudes de la República, y presenta también sus diferencias por $1'$, á fin de facilitar las interpolaciones para cualquiera latitud intermedia, por ser este elemento el argumento de la Tabla.

Al aplicar la fórmula debe atenderse al signo de $\cos. u$, según el valor que tenga el azimut. El término $A\, k \cos. u$ será positivo cuando u corresponda á los cuadrantes primero y cuarto, ó lo que es lo mismo, cuando su valor esté comprendido entre 0° y 90°, ó entre 270° y 360°; y negativo en los otros dos cuadrantes, lo que, por otra parte, puede verse en la figura haciendo variar la posición del punto B. El último término no varía de signo, al menos en nuestras latitudes septentrionales.

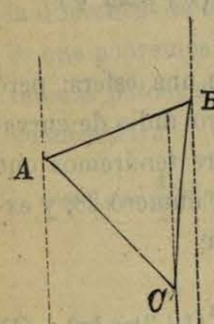

FIG 21ª

Ejemplo.—En el triángulo que ha servido de ejercicio para los diversos métodos de resolución, supongamos que la latitud de A (fig. 21ª) es: $\varphi = 19° 53' 42''.3$; y que para el azimut de B se encontró............. $u = 289° 40' 22''.2$, habiendo dado el cálculo para el lado $A B$,

$k = 49326^{m}.95$. Tomando en la Tabla de los logaritmos de los factores A y B que entran en la fórmula, sus valores para la latitud φ, se hallará: $\log. A = 8.5121862$ y $\log. B = 0.9649$. Para calcular la latitud φ' del punto B, se tiene:

A.....	8.512186	B..........	0.9649	Primer término......	$+\ 9'00''.07$
k.......	4.693084	k^2..........	9.3862	Segundo „	$-\ \ 1''.99$
$\cos. u$...	9.527177+	$\text{sen.}^2 u$......	9.9477		
	2.732447+		0.2988	$d =$	$+\ 8'58''.07$
				$\varphi =$	19° 53 42 .30
	$+540''.07$		$-1''.99$	$\varphi' =$	$20°\ 2'40''.37$

Como segundo ejemplo, calculemos la latitud de C, tercer vértice de nuestro triángulo. Para deducir el azimut del lado $A\,C$, tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Az.}\, A B &= \ \ 289°\, 40'\, 22''.2 \\ \text{Angulo}\, A &= -64\ \ 16\ \ 49\ .3 \\ \text{Az.}\, A\, C &= \ \ 225°\, 23'\, 32''.9 = u \end{aligned}$$

El ángulo A del triángulo está ya corregido por los errores de observación, lo cual ha demandado el cálculo previo del exceso esférico que corresponde al triángulo. Este es uno de los casos en que es indispensable determinarlo, á fin de no incluir en él el error que proviene puramente de las observaciones.

Los logaritmos de A y B son los mismos que antes, porque se refieren á la latitud del mismo punto de partida. El cálculo será, en consecuencia:

A......	8.512186	B..........	0.9649	Primer término......	$-\ 15'\ 2''.42$
k.......	4.596733	k^2..........	9.1935	Segundo „	$-\ \ \ 0\ .73$
$\cos. u$....	9.846490−	$\text{sen.}^2 u$......	9.7049		
	2.955409−		9.8633	$d =$	$-\ 15'\ 3''.15$
				$\varphi =$	19° 53 42 .30
	$-902''.42$		$-0''.73$	$\varphi' =$	$19°\, 38'\, 39''.15$

Es claro que en este último ejemplo se ha tomado por k la longitud y por u el azimut del lado $A\,C$.

De una manera idéntica se prosiguen los cálculos para todos los demás vértices, teniendo cuidado de deducir los azimutes de los lados combinando el del lado que se tome por punto de partida con los ángulos de la cadena, después de corregidos por los errores de observación, con el objeto de que no contengan más que el exceso esférico.

71.—**Diferencias de longitud.**—Llamando D la diferencia de meridianos $L' - L = A\,B\,P$ (fig. 20ª), el triángulo da:

$$\cos.\varphi' : \text{sen.}\,u :: \text{sen.}\,\theta : \text{sen.}\,D$$

de donde resulta:

$$\text{sen.}\,D = \frac{\text{sen.}\,\theta\,\text{sen.}\,u}{\cos.\varphi'}$$

Atendiendo á la pequeñez de D y θ, podremos obtener directamente el ángulo D por la fórmula $D = \text{sen.}\,D + \frac{1}{6}\,\text{sen.}^3\,D$; é introduciendo el desarrollo de sen. θ también hasta el término de tercer orden, se obtiene:

$$D = \frac{\theta\,\text{sen.}\,u}{\cos.\varphi'} - \frac{1}{6}\,\theta^3 \left(\frac{\text{sen.}\,u}{\cos.\varphi'} - \frac{\text{sen.}^3\,u}{\cos.^3\,\varphi'} \right)$$

Sustituyendo por θ su valor $\frac{k}{R'}$, á fin de pasar de la esfera cuyo radio es la unidad á la que tiene R' por radio, hallaremos:

$$D = \frac{k\,\text{sen.}\,u}{R'\,\cos.\varphi'} - \frac{k^3}{6\,R'^3} \left(\frac{\text{sen.}\,u}{\cos.\varphi'} - \frac{\text{sen.}^3\,u}{\cos.^3\,\varphi'} \right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

El último término de esta fórmula tiene un valor tan inapreciable á causa del cubo del radio que entra en su denominador, que siempre puede desecharse sin error sensible. Además de esto, se emplea generalmente la normal N en lugar de R', considerando que á causa de la gran distancia del polo P á los puntos A y B, el ángulo que forman los dos meridianos es sensiblemente el mismo que formarían en una esfera de radio N.

Para que el valor de D exprese segundos, será preciso dividirlo por sen. 1″, y haciendo por abreviación:

$$C = \frac{1}{N\,\text{sen.}\,1''}$$

podremos calcular la diferencia de meridianos por la fórmula:

$$D = \frac{C\,k\,\text{sen.}\,u}{\cos.\varphi'}$$

ó bién:

$$L' = L + \frac{C\,k\,\text{sen.}\,u}{\cos.\varphi'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Los logaritmos de C constan también en la tabla que pondré á continuación.

El signo de D será el mismo de sen u, de modo que la diferencia de longitud será positiva cuando el valor del azimut esté comprendido entre 0° y 180°, ó sea en el primero y segundo cuadrantes. Se ve que este modo de contar los azimutes concuerda perfectamente con la convención establecida, de considerar como positivas las longitudes occidentales y negativas las orientales.

Calculemos la longitud del vértice B de nuestro triángulo $A\,B\,C$ (fig. 21ª), suponiendo que la del punto A, contada desde el meridiano de México, sea $L = +\,0°\,23'\,37''.4$, y recordando que se tenía $u = 280°\,40'\,22''.2$.

C................	8.509614	
k................	4.693084	
sen. u..........	9.973880—	$L = +\ 0°\ 23'\ 37''.40$
cos. φ'.........	—9.972883	$D = -\ \ 26\ 38\ .51$
D........	3.203715—	$L' = -\ 0°\ 3'\ 1''.11$

El signo de L' asigna al vertice B una posición oriental respecto del meridiano de México. Para el azimut del lado $A\,C$ hallamos antes $u = 225°\,23'\,32''.9$, y por tanto la longitud de C será:

C................	8.509614	
k................	4.596733	
sen. u..........	9.852440—	$L = +\ 0°\ 23'\ 37''.40$
cos. φ'.........	—9.973958	$D = -\ \ 16\ \ 5\ \ 67$
D........	2.984829—	$L' = +\ 0°\ 7'\ 31''.73$

LOGARITMOS DE LOS FACTORES A, B Y C

PARA EL CÁLCULO DE LAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS.

Latitud.	Log. A.	Dif. por 1'.	Log. B.	Dif. por 1'.	Log. C.	Dif. por 1'.
15°00'	8.5123984	6.4	0.8347	5.0	8.5096844	2.1
15 30	. 3792	6.6	.8496	4.8	. 6780	2.2
16 00	. 3594	6.8	.8641	4.7	. 6714	2.3
16 30	. 3390	6.9	.8781	4.6	. 6646	2.3
17 00	. 3182	7.2	.8919	4.4	. 6577	2.4
17 30	. 2967	7.3	.9052	4.3	. 6505	2.4
18 00	. 2747	7.6	.9182	4.2	. 6432	2.5
18 30	. 2520	7.7	.9309	4.1	. 6356	2.6
19 00	. 2288	7.9	.9434	4.0	. 6279	2.6
19 30	. 2052	8.0	.9555	4.0	. 6200	2.7
20 00	. 1812	8.3	.9674	3.9	. 6120	2.8
20 30	. 1563	8.4	.9790	3.8	. 6037	2.8
21 00	8.5121311	8.5	0.9904	3.7	8.5095953	2.8
21 30	. 1056	8.7	1.0016	3.7	. 5868	2.9
22 00	. 0795	8.8	.0126	3.6	. 5781	2.9
22 30	. 0530	9.1	.0234	3.5	. 5693	3.0
23 00	8.5120258	9.2	.0340	3.5	. 5602	3.1
23 30	8.5119982	9.3	.0444	3.4	. 5510	3.1
24 00	. 9702	9.5	.0546	3.4	. 5417	3.2
24 30	. 9418	9.6	.0647	3.3	. 5322	3.2
25 00	. 9129	9.8	.0746	3.3	. 5226	3.3
25 30	. 8835	9.9	.0844	3.2	. 5128	3.3
26 00	. 8538	10.1	.0941	3.2	. 5029	3.4
26 30	. 8236	10.1	.1036	3.1	. 4928	3.4
27 00	8.5117933	10.3	1.1130	3.1	8.5094827	3.4
27 30	. 7624	10.5	.1222	3.0	. 4724	3.5
28 00	. 7309	10.6	.1314	3.0	. 4619	3.5
28 30	. 6991	10.7	.1404	3.0	. 4513	3.6
29 00	. 6670	10.8	.1494	2.9	. 4406	3.6
29 30	. 6346	10.9	.1582	2.9	. 4298	3.6
30 00	. 6019	11.0	.1670	2.9	. 4189	3.7
30 30	. 5689	11.1	.1757	2.9	. 4079	3.7
31 00	. 5356	11.2	.1842	2.8	. 3968	3.7
31 30	. 5019	11.4	.1927	2.8	. 3856	3.8
32 00	. 4678	11.4	.2012	2.8	. 3742	3.8
32 30	. 4335	11.6	.2095	2.8	. 3628	3.9
33 00	8.5113987		1.2178		8.5093512	

Si se quisieran expresar en tiempo las longitudes de estos puntos, se multiplicarían por $\frac{4}{60}$ las expresadas en arco, según la regla del número 25, y obtendríamos que la de A es $+ 1^m.34^s.49$, la de B $- 0^m12^s.07$ y la de $C + 0^m30^s\,12$.

72.—**Azimutes inversos**.—Para determinar los azimutes de todos los lados de una cadena, se combinan los ángulos con el azimut conocido del primer lado, que es lo que se ha hecho para calcular el azimut de $A\,C$ en nuestro triángulo; pero si sè desea el azimut de $B\,C$, por ejemplo, sería necesario combinar el ángulo B con el de $B\,A$, el cual no es otra cosa más que el azimut inverso de $A\,B$. Vimos que en la Topografía se reduce comunmente esta deducción á tomar ángulos suplementarios, á causa de la suposición del paralelismo de todos los meridianos; pero en la Geodesia no es admisible esta hipótesis, y la deducción de los azimutes inversos no es tan sencilla, porque hay que llevar en cuenta la *convergencia de los meridianos*.

En la figura 20ª he llamado u el azimut de $A\,B$, que es el ángulo $P\,A\,B$, Si los meridianos de A y B fuesen paralelos, el azimut inverso sería $u' = 180° + u$; pero puesto que convergen hacia el polo P, deberá ser u' un poco mayor que $180° + u$, y designando por c el efecto de la convergencia, tendremos:

$$u' = 180° + u + c$$

Para calcular el pequeño ángulo c apliquemos al triángulo $P\,A\,B$ la fórmula trigonométrica:

$$\tan.\ \frac{1}{2}\,(A+B) = \cot.\ \frac{1}{2}\,C \frac{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}{\cos.\frac{1}{2}(a+b)}$$

siendo en nuestro caso $A = u$; $B = 360° - u' = 180° - (u + c)$; y $C = D$, diferencia de meridianos. De aquí se deduce que

$$\frac{1}{2}\,(A+B) = 90° - \frac{1}{2}\,c$$

Además, los valores de los lados son: $a = 90° - \varphi'$; $b = 90° - \varphi$; de donde resulta:

$$\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$$

y

$$\frac{1}{2}(a+b) = 90° - \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$$

Haciendo, pues, la sustitución, se tendrá:

$$\cot.\frac{1}{2}c = \cot.\frac{1}{2}D\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}{\operatorname{sen}.\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}$$

ó bien:

$$\tan.\frac{1}{2}c = \tan.\frac{1}{2}D\,\frac{\operatorname{sen}.\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\cos.\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}$$

Como los ángulos D y c son siempre muy pequeños, es suficientemente exacto tomar los arcos por sus tangentes, y se obtendrá en segundos:

$$c = D\,\frac{\operatorname{sen}.\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\cos.\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')} \quad\text{.......................}\quad (5)$$

La diferencia de latitud de los extremos de una línea geodésica es por lo general tan poco considerable, que el coseno de su mitad se confunde sensiblemente con la unidad, por lo cual se suprime comunmente el divisor de la fórmula precedente para adoptar la más sencilla $c = D\operatorname{sen}.\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$. Con este valor, el de u' será:

$$u' = 180° + u + D\operatorname{sen}.\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$$

Calculemos en nuestro triángulo el azimut de BA, ó sea el de A tomado en el horizonte de B, recordando que el de AB era......... $u = 289°\,40'\,22''.2$. Se hallará que la latitud media de A y B es $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi') = 19°\,58'\,11''.3$.

D..................	$3.20372-$	$180° + u - 360° =$	$190°\,40'\,22''.2$
$\operatorname{sen}.\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$...	9.53342	$c = -$	$9\ \ 5\ .93$
c............	$2.73714-$	$u'' =$	$109°\,31'\,16''.3$
$c = -$	$545''.93$		

Siempre que u sea mayor que 180°, como sucede en este caso, deben restarse 360° de $180° + u$, ó bien tomar por fórmula general del azimut inverso: $u' = u \pm 180° + c$. Se adopta el signo superior cuando u sea menor que 180°, y el inferior cuando sea mayor. En cuanto al signo de la convergencia c es el mismo de D, al menos en nuestras latitudes septentrionales, que se suponen siempre positivas.

Si á u' le agregamos el ángulo B del triángulo, resultará el azimut de $B\,C$. Los ángulos que entren en la combinación deben corregirse antes por él pequeño error de las observaciones, para lo cual se necesita calcular el exceso esférico, según se ha dicho. En nuestro ejemplo, el ángulo B corregido es de $47°\,53'\,15''.0$; y así hallaremos que el azimut de $B\,C$ es de $157°\,24'\,31''.3$.

Como segundo ejercicio calculemos el azimut inverso de $A\,C$, siendo el directo $u = 225°\,23'\,32''.9$ y

$$\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') = 19°\,46'\,40''.$$

D..................	$2.89483-$	$u - 180° =$	$45°\,23'\,32''.9$
$\operatorname{sen}.\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$...	9.52939	$c = -$	$5\ 26\ .7$
c..................	$2.51422-$	$u' =$	$45°\,18'\ \ 6''.2$
$c = -$	$326''.75$		

De una manera análoga se procede en cada triángulo, y para evitar un error al hacer las combinaciones, es conveniente servirse de un croquis de la triangulación.

El modo de cerciorarse de que no ha habido equivocación en los cálculos, consiste en determinar la latitud y la longitud de un mismo punto por medio de distintos lados, pues es claro que deberán concordar sensiblemente los resultados. Por último ejercicio, y para presentar un ejemplo del modo de arreglar todos los cálculos que se refieren á un mismo vértice, determinaremos la posición de C valiéndonos de los datos calculados para el punto B. Se tiene.......... $B\,C = k = 47986^{m}.69$; $u = 157°\,24'\,31''.3$; y $\varphi = 20°\,2'\,40''.37$.

A	8.512179	B	0.9684	C	8.509611
k	4.681121	k^2	9.3622	k	4.681121
cos. u	9.965328−	sen.$^2 u$	9.1690	sen. u	9.584507
				cos. φ'	−9.973958
	$\left\{\begin{array}{l} 3.158628- \\ -1440''.88 \end{array}\right.$		$\left\{\begin{array}{l} 9.4996 \\ -0''.32 \end{array}\right.$	D	2.801281
				sen. $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$.	9.530798
				c	2.332079
	$-24'\,00''.88$				
	$-\quad 0\,.32$				
$d=$	$-24'\ 1''.2$	$D=+$	$10'\,32''.82$	$c=+$	$3'\,34''.82$
$\varphi=$	$20°\ 2\ 40\ .37$	$L=$	$-0°\ \ 3\ \ 1\ .11$	$180°+u=$	$337°\,24'\,31''.3$
$\varphi'=$	$19°38'39''.17$	$L'=$	$+0°\ \ 7'\,31''.71$	$u'=$	$337°\,28'\ \ 6''.12$

Todos estos resultados concuerdan bien con los que se han obtenido antes por medio de los datos primitivos referentes al punto A.

CAPITULO VIII.

CONSTRUCCIÓN DE LAS CARTAS GEOGRÁFICAS.

73.—La superficie de la tierra no es *desarrollable*, ó susceptible de extenderse de modo que coincida con un plano en todos sus puntos, como lo son, por ejemplo, la superficie de un cono, que extendida en plano produce un sector, y la de un cilindro, que desarrollada origina un cuadrilátero. De aquí resulta que para representar sobre el papel la carta geográfica de un continente, de una nación, etc., es preciso recurrir á ciertas construcciones geométricas convencionales llamadas *proyecciones*.

Estas pueden clasificarse, en general, en dos grupos: el uno comprende las proyecciones *por desarrollo*, y el otro las proyecciones *perspectivas*. Las primeras consisten en sustituir á la superficie del globo otra superficie desarrollable; en hacer en ella la configuración de los objetos de la tierra por medio de ciertas consideraciones geométricas; y en desarrollarla, por último, para que aparezca en plano la forma así obtenida. Las proyecciones perspectivas se obtienen suponiendo que desde un punto cualquiera se dirigen visuales á todos los objetos que deben figurar en la carta; cortando en seguida todas estas visuales por medio de un plano; y señalando en este el lugar preciso en que es cortado por cada una de ellas. De este modo resulta una imagen más ó menos fiel de la situación relativa de los objetos.

Casi en todas las construcciones de cartas geográficas se supone