CAPITULO VI.

CÁLCULO DE LOS TRIÁNGULOS.

59.—Se ha demostrado en el Capítulo II que los triángulos geodésicos pueden considerarse como trazados en la superficie de una esfera, y por tanto les serán directamente aplicables los métodos de resolución que enseña la Trigonometría esférica. Sin embargo, la circunstancia de tener siempre lados de muy poca amplitud, conduce en ciertos casos á modificaciones y simplificaciones de los procedimientos ordinarios, las que me propongo desarrollar en este Capítulo.

Por tres métodos diferentes puede resolverse un triángulo geodésico. El primero consiste en aplicarle inmediatamente las fórmulas usuales de la Trigonometría esférica, más ó menos modificadas. El segundo, conocido con el nombre de método de Delambre, sustituye al triángulo esférico el formado por las cuerdas correspondientes á los lados de aquel, lo cual equivale á suponer inscrito, en la superficie curva del elipsoide, un poliedro de caras planas y triangulares. Este poliedro no sirve más que de auxiliar ó intermedio para la ejecución de los cálculos, y se pasa en seguida á reponer las cosas en su estado verdadero, reduciendo de nuevo los resultados á la superficie del elipsoide. El tercer método está fundado en un teorema muy notable, demostrado por Legendre, que permite la sustitución de un triángulo rectilíneo al triángulo esférico, sin más modificación que la de hacer ligeras correcciones á los ángulos de este último. Por

su extremada sencillez, el método de Legendre es el único que se aplica hoy; mas daré á conocer también los dos primeros, porque se han aplicado á varios trabajos geodésicos de mucha importancia.

60.—**Primer método de resolución.**—La medida directa de la base, ó el cálculo de los triángulos anteriores al que se considera, hace que en cualquiera de ellos se conozca un lado y los tres ángulos, por lo cual la fórmula que debe emplearse es:

$$\text{sen.}\, c = \text{sen.}\, b \frac{\text{sen.}\, C}{\text{sen.}\, B} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Como la base, ó en general el lado conocido b, lo está en unidades lineales, deberemos comenzar por reducirlo á segundos por la fórmula:

$$b = \frac{k}{R' \,\text{sen.}\, 1''} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en la que k expresa la extensión lineal de b, y R' el radio de la esfera osculatriz en el punto cuya latitud es φ (número 27). Teniendo ya la base convertida en arco, se toma su seno para aplicar la ecuación (1). Del cálculo resulta el lado c también en arco; pero luego se determina su extensión k' en metros, por la relación:

$$k' = c R' \,\text{sen.}\, 1'' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Como el valor de R' varía con la latitud, no deberá ser el mismo para el lado c que para b; pero se puede adoptar para cada triángulo un valor medio de R', tal como el que corresponde al término medio de las latitudes de sus tres vértices. Tomemos por ejemplo los siguientes datos, en que supongo los ángulos ya corregidos por los pequeños errores de observación:

$$k = 39512^{m}41 \qquad \begin{aligned} A &= 64^\circ\, 16'\, 49''.26 \\ B &= 47\;\; 53\;\; 15\;.03 \\ C &= 67\;\; 50\;\; 00\;.17 \end{aligned}$$

siendo la latitud media del triángulo, $\varphi = 19^\circ\, 51'\, 40''$.

k..........	4.5967335	sen. b.....	7.7932113	c..........	3.2039899
R..........	− 6.8035192	sen. C....	9.9666534	R'........	6.8035192
sen. 1''.....	− 4.6855749	sen. B...	−9.8703042	sen. 1''.....	4.6855749
b..........	3.1076394	sen. c......	7.8895605	k'..........	4.6930840
$b = 00^\circ\, 21'\, 21''.266$		$c = 00^\circ\, 26'\, 39''.521$		$k' = 49326^{m}.92$	

61.—En lugar de proceder de esta manera, y atendiendo á que los arcos b y c son de muy poca amplitud, podríamos desarrollar sus senos por la ecuación:

$$\text{sen.}\,x = x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = x\left(1 - \frac{1}{6}x^2\right)$$

siendo suficientes esos dos términos de la serie. Aplicándola al arco b, y teniendo presente que b en partes del radio es igual á $\frac{k}{R'}$, se tendrá:

$$\text{sen.}\,k = k\left(1 - \frac{1}{6}\,\frac{k^2}{R'^2}\right)$$

ó bien tomando los logaritmos, resulta fácilmente:

$$\log.\,\text{sen.}\,k = \log.\,k - \frac{Mk^2}{6R'^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

La segunda potencia de R' hace tan pequeño el último término, que no se produce error perceptible introduciendo en él un valor medio de R', como el que conviene á la latitud media de 45°, ó mejor á la latitud media del país en que se trabaja. Para la República podría adoptarse $\varphi = 23°\ 30'$ por latitud media, y entonces se obtiene:

$$\log.\,\text{sen.}\,k = \log.\,k - (5.25234)\,k^2$$

Con este valor logarítmico puede ya procederse al cálculo de la ecuación (1), que dará el log. sen. k', y para pasar de éste al de k', emplearemos la serie:

$$x = \text{sen.}\,x + \frac{1}{6}\,\text{sen.}^3 x - \ldots\ldots\ldots$$

que aplicada al lado en cuestión, será:

$$k' = \text{sen.}\,k'\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{\text{sen.}^2 k'}{R'^2}\right)$$

y de aquí se obtiene:

$$\log.\,k = \log.\,\text{sen.}\,k' + \frac{M\,\text{sen.}^2 k'}{6R'^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Calculando el coeficiente del último término para la latitud media de nuestro país, se encontrará:

$$\log.\,k' = \log.\,\text{sen.}\,k' + (5.25234)\,\text{sen.}^2 k'$$

A fin de que se comprenda mejor la marcha del cálculo, lo aplicaré al mismo ejemplo anterior:

k^2	9.19347		
Const	5.25234	k	4.5967335
	4.44581......	Corrección	−0.0000028
		sen. k	4.5967307
		sen. C	9.9666534
sen.$^2 k'$	9.38616	sen. B	−9.8703042
Const.	5.25234	sen. k'	4.6930799
	4.63850........	Corrección......	+0.0000044
		k'	4.6930843
		$k' = 49326^m.95$	

Nótese que aunque sen. k y sen. b pertenecen al mismo arco, que es el número de segundos que abraza la base, no son iguales sus logaritmos; porque el primero está referido á una esfera cuyo radio es R', y, por consiguiente, está expresado en metros; mientras que el segundo se refiere á la unidad trigonométrica, que, como se sabe, se supone dividida en diez millones de partes.

62.—Puede todavía resolverse el triángulo por medio de las series, de este modo: desarrollando el sen. b hasta el término de tercer orden, tendremos en la ecuación (1):

$$\text{sen.}\,c = \left(b - \frac{1}{6}b^3\right)\frac{\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B}$$

Pero como también se tiene: $c = \text{sen.}\,c + \frac{1}{6}\,\text{sen.}^3 c$, resulta por la sustitución:

$$c = \left(b - \frac{1}{6}b^3\right)\frac{\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B} + \frac{1}{6}\left(b - \frac{1}{6}b^3\right)^3\frac{\text{sen.}^3\,C}{\text{sen.}^3\,B}$$

Haciendo las operaciones indicadas con omisión de los términos de orden superior al tercero, se obtiene:

$$c = b\,\frac{\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B} + \frac{1}{6}\,b^3\left(\frac{\text{sen.}^3\,C}{\text{sen.}^3 B} - \frac{\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B}\right)$$

y poniendo por b y c sus valores $\frac{k}{R'}$ y $\frac{k'}{R'}$, se halla por último:

$$k' = k\,\frac{\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B} + \frac{k^3}{6R'^2}\left(\frac{\text{sen.}^3\,C}{\text{sen.}^3 B} - \frac{\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B}\right) \text{ ....(6)}$$

En atención á la pequeñez del último término puede emplearse un valor medio ó constante de R'. El primer término representa la resolución del triángulo considerado como rectilíneo; de manera que el siguiente debe verse como la corrección que proviene de la curvatura de los lados, ó de la esfericidad supuesta al elemento terrestre en que está trazado el triángulo. Calculemos por este método el mismo ejemplo precedente.

k.........	4.5967335			k^3.........	3.79020
sen. C....	9.9666534			sen. C.....	9.96665
sen. B...	−9.8703042	$6R'^2$.......	−4.38544	....	−4.38544
	4.6930827	.........cubo.........	4.07925	sen. B.....	9.87030
			9.69381		9.50111

Primer término..................	=	49326ᵐ.773
Segundo „	=	+ 0 .494
Tercer „	=	− 0 .317
k'	=	49326ᵐ.95

63.—**Segundo método de resolución.**—En este procedimiento se reduce el triángulo esférico al que forman las cuerdas de sus lados. Veamos primero cómo se reduce la base k á su cuerda q. Designando como antes por b la amplitud de la base, tendremos:

$$q = 2R'\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,b = 2R'\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\,\frac{k}{R'}$$

Y desarrollando el seno del pequeño arco $\frac{1}{2}b$, resulta:

$$q = 2R'\left(\frac{1}{2}\,\frac{k}{R'} - \frac{1}{48}\,\frac{k^3}{R'^3}\right)$$

cuya reducción da por último:

$$q = k - \frac{1}{24}\,\frac{k^3}{R'^2}$$

lo cual indica que para obtener la cuerda basta restar del lado la 24ª parte de su cubo dividido por el cuadrado del radio. En éste, como en todos los casos, en que entra como divisor de una línea geodésica la segunda potencia de R', no es preciso usar más que un valor aproximativo de esta cantidad. Si se quiere, puede determinarse desde luego el logaritmo de q, pues la ecuación anterior da:

$$\log.q = \log.k - \frac{M}{24R'^2}\,k^2 \text{ .... (7)}$$

que para la latitud media de este país, es:

$$\log.q = \log.k - (4.65028)\,k^2$$

De este modo tenemos ya conocida la base del triángulo rectilíneo formado por las cuerdas. Para deducir sus ángulos, sea $A\,B\,C$ (fig. 19ª) el triángulo geodésico y O el centro de la esfera osculatriz. Si desde A como centro trazamos otra esfera cuyo radio sea la unidad, sus intersecciones con $B\,A\,O$, $C\,A\,O$ y con el plano $m\,A\,n$ de las cuerdas, determinará un triángulo esférico $m\,n\,p$, cuyo ángulo p es igual á A, y cuyo lado $m\,n$ mide el ángulo de las cuerdas $m\,A\,n = A'$.

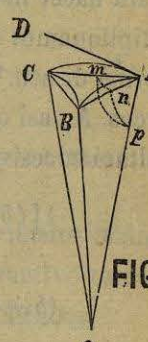

FIG 19

Tirando, además, la tangente $A\,D$ al lado b, se tiene:

$$mp = O\,A\,C = 90° - D\,A\,C = 90° - \frac{1}{2}\,b$$

y de la misma manera hallaríamos: $np = 90° - \frac{1}{2}\,c$.

Con los valores precedentes, el triángulo mnp suministra la ecuación:

$$\cos. mn = \cos. A' = \text{sen.}\,\frac{1}{2}b\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}c + \cos.\,\frac{1}{2}b\,\cos.\,\frac{1}{2}c\,\cos. A$$

y puesto que b y c son lados geodésicos expresados en arco, desarrollaremos los senos y cosenos de sus mitades hasta los términos de segundo orden, de lo que resulta:

$$\cos. A' = \cos. A + \frac{1}{4}bc - \frac{1}{8}(b^2+c^2)\cos. A$$

Por la forma de esta ecuación se comprende que A y A' difieren muy poco; designando por x su pequeña diferencia tendremos........ $A' = A - x$, y en el desarrollo del coseno de $A - x$ no habrá inconveniente en tomar el arco x por su seno y la unidad por su coseno para obtener:

$$\cos. A' = \cos. A + x\,\text{sen.}\,A$$

Igualando esta ecuación con la precedente hallaremos que el valor de x es:

$$x = \frac{\frac{1}{8}[2bc - (b^2+c^2)\cos. A]}{\text{sen.}\,A}$$

Para hacer más fácilmente calculable por logaritmos este valor, multipliquemos el primer término de su numerador por la unidad bajo la forma de $\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}A + \cos.^2\,\frac{1}{2}A$, y sustituyamos $\cos.^2\,\frac{1}{2}A - \text{sen.}^2\,\frac{1}{2}A$ por cos. A, así como $2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}A\,\cos.\,\frac{1}{2}A$ por sen. A, de todo lo cual resultará sucesivamente:

$$x = \frac{\frac{1}{8}[(b^2+2bc+c^2)\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}A - (b^2-2bc+c^2)\cos.^2\,\frac{1}{2}A]}{2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}A\,\cos.\,\frac{1}{2}A}$$

$$= \frac{(b+c)^2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}A - (b-c)^2\cos.^2\,\frac{1}{2}A}{16\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}A\,\cos.\,\frac{1}{2}A}$$

$$= \left(\frac{b+c}{4}\right)^2 \tan.\,\frac{1}{2}A - \left(\frac{b-c}{4}\right)^2 \cot.\,\frac{1}{2}A$$

Los arcos b, c y x están hasta ahora expresados en partes del radio trigonométrico, y así es que para que la reducción x resulte en

segundos, es necesario introducir los lados b y c también en segundos, con lo cual se tiene por último:

$$x = \left(\frac{b+c}{4}\right)^2 \tan.\,\frac{1}{2}A\,\text{sen.}\,1'' - \left(\frac{b-c}{4}\right)^2 \cot.\,\frac{1}{2}A\,\text{sen.}\,1'' \ \ldots(8)$$

64.—El cálculo de esta fórmula demanda una resolución aproximativa del triángulo geodésico, la cual se hace considerándolo como rectilíneo, esto es, reduciendo á 180° la suma de los ángulos observados, por medio de la adición ó la substracción á cada uno de ellos, de la tercera parte de la diferencia que se encuentre respecto de 180°. La base k en metros se reduce á segundos por la ecuación (2) para obtener el arco equivalente b, lo mismo que los otros lados calculados aproximadamente, que darán los valores de a y c. En seguida se calcula la ecuación precedente para determinar la corrección x de cada ángulo, con lo que resultan los del triángulo formado por las cuerdas. Finalmente, se reduce la base k á su cuerda por la fórmula (7), y de esta manera se tiene ya lo bastante para calcular exactamente los lados del triángulo plano, ó sea las cuerdas de los lados geodésicos. Para reducir después las cuerdas á sus arcos, ó lo que es lo mismo, para obtener las líneas geodésicas, la propia ecuación (7) da:

$$\log. k' = \log. q' + \frac{M}{24R'^2}q'^3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

pues k' y q' difieren tan poco, que puede tomarse una por otra en la pequeña corrección logarítmica.

Todo el método se comprenderá mejor aplicándolo al mismo triángulo que hemos calculado antes. Para el cálculo aproximativo tomaré los ángulos tales como resultaron de la observación, á saber.

$$\begin{aligned} A &= 64^\circ\,16'\,51''.25 \\ B &= 47\ \ 53\ \ 17\ .03 \\ C &= 67\ \ 50\ \ \ 2\ .15 \\ \hline & \qquad\qquad 10''.43 \end{aligned}$$

k	4.59673						
R′ sen. 1″.	−1.48909						
b	3.10764						
sen. B	−9.87030			$a = 1558''.2$		$\frac{1}{2}A = 32°\ 8'\ 25''$	
	3.23734		3.23734	$b = 1281\ .3$		$\frac{1}{2}B = 23\ 56\ 38$	
sen. A	9.95469	sen. C	9.96665	$c = 1599\ .6$		$\frac{1}{2}C = 33\ 55\ 1$	
a	3.19203	c	3.20399				

Procedamos ahora al cálculo de las reducciones de los ángulos:

$\frac{1}{4}(b+c)$	2.8584	$\frac{1}{4}(b-c)$	1.9009		$-\ 1''.580$
”	2.8574	”	1.9009		$+\ 0\ .049$
				$x =$	$-\ 1''.53$
tan. $\frac{1}{2}A$	9.7982	cot. $\frac{1}{2}A$	0.2018		
sen. 1″	4.6856		4.6856		$A = 64°\ 16'\ 51''.25$
	0.1926		8.6892		$A' = 64°\ 16'\ 49''.72$
$\frac{1}{4}(a+c)$	2.8973	$\frac{1}{4}(a-c)$	1.0128		$-\ 1''.341$
”	2.8973	”	1.0128		$+\ 0\ .001$
				$x =$	$-\ 1''.34$
tan. $\frac{1}{2}B$	9.6474	cot. $\frac{1}{2}B$	0.3525		$B = 47°\ 53'\ 17''.03$
sen. 1″	4.6856		4.6856		
	0.1276		7.0637		$B' = 47°\ 53'\ 15''.69$
$\frac{1}{4}(a+b)$	2.8512	$\frac{1}{4}(a-b)$	1.8401		$-\ 1''.643$
”	2.8512	”	1.8401		$+\ 0\ .034$
				$x =$	$-\ 1''.61$
tan. $\frac{1}{2}C$	9.8276	cot. $\frac{1}{2}C$	0.1724		$C = 67°\ 50'\ 2''.15$
sen. 1″	4.6856		4.6856		
	0.2156		8.5382		$C = 67°\ 50'\ 00''.54$

La suma de los tres ángulos de las cuerdas excede $5''.95$ de 180°. Este exceso proviene de los errores de observación, por lo cual restaremos $1''.983$ de cada ángulo, y entonces los corregidos para aplicar la resolución serán:

$$\begin{aligned} A' &= 64°\ 16'\ 47''.74 \\ B' &= 47\ \ 53\ \ 13\ .71 \\ C' &= 67\ \ 49\ \ 58\ .55 \\ \hline & 180°\ 00'\ 00''.00 \end{aligned}$$

Resolvamos ahora este triángulo de las cuerdas, comenzando por reducir la base k por la fórmula (7):

		Const.	4.6503		4.6503		4.6503
k	4.5967335	k^2	9.1935	q'^2	9.3622	q''^2	9.3862
Correc.	−0.0000007		3.8438		4.0125		4.0365
q	4.5967328						
sen. B'	−9.8703017						
	4.7264311		4.7264311				
sen. A'	9.9546887	sen. C'	9.9666520				
q'	4.6811198	q''	4.6930831				
	+ 0.0000010	Correc.	+0.0000011				
k'	4.6811208	k''	4.6930842				
	$k' = 47986^m.69$		$k'' = 49326^m.94$				

Tal es el método de Delambre; aunque sus cálculos preparatorios sólo demandan el uso de logaritmos de cuatro ó cinco cifras decimales, es, sin embargo, en su conjunto, más laborioso que cualquiera de las variedades que he expuesto del primer procedimiento.

65.—**Tercer método de resolución.**—El teorema de Legendre que sirve de fundamento á este método, puede enunciarse así, dividiéndolo en dos proposiciones:

1ª—*Si se tienen un triángulo esférico de lados muy poco curvos, y un triángulo rectilíneo cuyos lados sean respectivamente iguales en extensión á los del esférico, los ángulos de uno y otro diferirán una misma cantidad.*

2ª—*Esta diferencia constante es igual á la tercera parte del exceso esférico, esto es, á la tercera parte del exceso que sobre 180° tiene la suma de los tres ángulos del triángulo esférico.*

Para demostrar la primera, sean A, B, C los ángulos del triángulo esférico; A', B', C' los del rectilíneo, y a, b, c los lados comunes á ambos. Supondré, además, por lo pronto y para mayor sencillez, que el primero pertenece á una esfera que tiene la unidad por radio. El triángulo rectilíneo da la ecuación:

$$\cos. A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (M)$$

Y puesto que sen.$^2 A' = 1 - \cos.^2 A'$, se deduce la siguiente:

$$\text{sen.}^2 A' = \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

que desarrollada y reducida adquiere esta otra forma:

$$\text{sen.}^2 A' = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2} \quad \ldots\ldots\ldots (N)$$

El triángulo esférico proporciona la siguiente ecuación:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen.}\, b\, \text{sen.}\, c}$$

Como por el supuesto son de poca curvatura los lados de este triángulo, sustituyamos los desarrollos de sus senos y cosenos, llevando la aproximación hasta los términos de cuarto orden, y se tendrá:

$$\cos. A = \frac{1 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{24}a^4 - (1 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{24}b^4)(1 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{24}c^4)}{(b - \frac{1}{6}b^3)(c - \frac{1}{6}c^3)}$$

Efectuando las multiplicaciones siempre hasta los términos de cuarto órden, resulta:

$$\cos. A = \frac{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) - \frac{1}{24}(b^4+c^4-a^4) - \frac{1}{4}b^2c^2}{bc[1 - \frac{1}{6}(b^2+c^2)]}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) - \frac{1}{24}(b^4+c^4-a^4+6b^2c^2)}{bc} \cdot [1 + \tfrac{1}{6}(b^2+c^2)]$$

Para ejecutar la multiplicación del quebrado por el binomio que he trasladado al numerador, nótese que, como nos propusimos no apreciar más allá de los términos de cuarto orden, la segunda parte del binomio por la segunda del quebrado dará términos de orden superior al cuarto, y por tanto, despreciables; así es que sólo deberá multiplicarse por la primera parte del quebrado, y resultará:

$$\cos. A = \frac{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) + \frac{1}{12}(b^4+c^4+2b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2) - \frac{1}{24}(b^4+c^4-a^4+6b^2c^2)}{bc}$$

y haciendo las reducciones, se obtiene:

$$\cos. A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{24bc}$$

La primera parte de este valor es idéntica á la ecuación (M), y el numerador de la segunda parte es el mismo de la relación (N); por lo cual se tendrá sustituyendo:

$$\cos. A = \cos. A' - \frac{1}{6} bc\, \text{sen.}^2 A'$$

La forma de esta función indica que los ángulos A y A' difieren muy poco, puesto que la diferencia de sus cosenos está representada por un producto de fracciones, de las que b y c son siempre muy pequeñas respecto del radio. De esto se deduce que si designamos por x la pequeña diferencia entre A y A', estamos autorizados para tomar en el desarrollo de $\cos. (A' + x)$, la unidad por $\cos. x$ y el arco x por su seno. Haciéndolo así, en efecto, resultará:

$$\cos. A = \cos. (A' + x) = \cos. A' - x\, \text{sen.}\, A'$$

é igualando este valor con el precedente, se obtiene:

$$x = \frac{1}{6} bc\, \text{sen.}\, A'$$

Si llamamos ahora s la superficie del triángulo rectilíneo, se tendrá:

$$s = \frac{1}{2} bc\, \text{sen.}\, A'$$

por lo que el valor de x es:

$$x = A - A' = \frac{1}{3} s$$

Hasta aquí se ha calculado en el supuesto de que el triángulo esférico estaba trazado sobre una esfera cuyo radio fuese la unidad; si llamamos S la superficie de otro triángulo semejante á aquel, pero trazado sobre una esfera de radio R', tendremos:

$$s = \frac{S}{R'^2}$$

y sustituyendo en el valor de x, se tendrá finalmente:

$$A - A' = \frac{S}{3R'^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (O)$$

De igual manera hallaríamos:

$$\left.\begin{aligned} B-B' &= \frac{S}{3R'^2} \\ C-C' &= \frac{S}{3R'^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (P)$$

de donde se deduce que $A-A'=B-B'=C-C'$, lo cual demuestra la primera proposición.

66.—Veamos ahora cómo esta diferencia constante es la tercera parte del exceso esférico. Designándolo por e, se tiene según su definición:

$$A+B+C=180^\circ+e$$

Sumando las ecuaciones (O) y (P), y teniendo presente que A' B' y C' pertenecen á un triángulo rectilíneo, resulta:

$$A+B+C=180^\circ+\frac{S}{R'^2}$$

de donde se infiere que

$$\frac{S}{R'^2}=3x=e$$

ó bien que

$$x=\frac{1}{3}e$$

lo cual demuestra la segunda parte del teorema de Legendre.

El pequeño arco x tomado por su seno, está, por consiguiente, expresado en partes del radio; para que exprese segundos, es preciso multiplicarlo por sen. $1''$, y despejando, se obtiene:

$$e=3x=\frac{S}{R'^2\,\text{sen. }1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

ecuación que nos da el valor del exceso esférico. En razón de la pequeñez de e, es evidente que para calcularlo será indiferente tomar por S la superficie del triángulo rectilíneo ó la del esférico que difieren muy poco, y aun en muchos casos es bastante emplear un valor aproximativo de ese elemento, tal como el que resultaría de medir gráficamente la base y la altura del triángulo representado en un croquis, con tal que no fuese muy pequeña la escala de la construc-

ción. Por otra parte, aun antes de ocuparse de la resolución de un triángulo geodésico, siempre se conoce uno de sus lados y sus tres ángulos, por lo que se tendrá:

$$S=\frac{1}{2}b^2\frac{\text{sen. }A\,\text{sen. }C}{\text{sen. }B}$$

Apliquemos el cálculo de la fórmula (10) al triángulo que se ha considerado en los ejemplos anteriores.

0.5	9.69897	
k^2	9.19347	
sen. A	9.95469	
sen. C	9.96665	
sen. B	-9.87030	
S	8.94348	
R'^2 sen. $1''$	-8.29261	
e	0.65087	$e=4''.48$ $\quad x=1''.493$

67.—La consecuencia inmediata del teorema de Legendre es ésta. Como la resolución de los triángulos geodésicos tiene por objeto hallar la magnitud de los lados, si se resta de cada uno de los ángulos el tercio del exceso esférico que corresponde al triángulo á que pertenecen, obtenemos un triángulo plano de lados iguales á los del esférico; y, por consiguiente, la resolución de éste queda reducida á la simple aplicación de las reglas de la trigonometría plana. El método de Legendre presenta, además, otra gran ventaja, y es la de no ser indispensable el cálculo del exceso esférico más que cuando se desea saber á cuánto ascienden los errores de observación; porque cuando no se tiene tal interés, tanto éstos como el exceso esférico se distribuyen por partes iguales entre los tres ángulos, sin ocuparse del valor absoluto de las dos causas que hacen diferir de 180° la suma de los ángulos. En el triángulo que nos ha servido de ejemplo, la suma de los tres ángulos observados da $10''.43$ de más sobre 180°, cantidad que proviene del exceso esférico y de los errores de observación. Restando de ella el exceso esférico, que se ha hallado ser de $4''.48$, quedan $5''.95$ de errores de observación. Para reducir el triángulo al equivalente rectilíneo, tenemos que restar $1''.4933$ de cada ángulo, y como los errores de observación también deben distribuirse por igual, en atención á que es preciso admitir que provienen de causas semejantes en cada ángulo, tendremos que quitarles, además, $1''.9833$, lo cual equivale á restarles, de una sola vez, $3''.477$, tercera parte de la diferencia total $10''.43$. Esta ventaja no existe en los otros métodos que he dado á conocer; porque para aplicarlos es preciso conocer el exceso esférico á fin de corregir el triángulo por los errores de observación.

Calculemos nuestro triángulo por el procedimiento de Legendre.

Angulos observados.		Angulos corregidos.
$A = 64° 16' 51''.25$		$A = 64° 16' 47''.77$
$B = 47\ 53\ 17\ .03$		$B = 47\ 53\ 13\ .55$
$C = 67\ 50\ \ 2\ .15$		$C = 67\ 49\ 58\ .68$
$180° 00' 10''.43$	Suma	$180° 00' 00''.00$
k 4.5967335		
sen. B .... −9.8703014		
4.7264321		.... 4.7264321
sen. A 9.9546087		sen. C 9.9666522
k' 4.6811208		k'' 4.6930843
$k' = 47986^{m}.69$		$k'' = 49326^{m}.95$

Se ve, pues, que el procedimiento es absolutamente el mismo que si se tratara de un triángulo topográfico.

68.—Aunque para la resolución de los triángulos no sea indispensable el cálculo del exceso esférico según lo que se ha dicho, sí es muy conveniente, para formarse idea del monto del error en las medidas angulares, y necesario en algunos casos que indicaré después. La fórmula (10) que da su valor es bastante sencilla; pero cuando no se desea una rigurosa exactitud, puede procederse así: sea s la superficie que debe tener un triángulo para que su exceso esférico sea de $1''$, condición que equivale á $s = R'^2 \text{ sen. } 1''$, de la cual se deduce, eliminando á $R'^2 \text{ sen. } 1''$ entre ésta y la ecuación (10):

$$e = \frac{S}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Como en la expresión de s entra el radio R', sus valores varían lentamente con la latitud. Expresando á s en miriaras, se encuentran los resultados siguientes para las latitudes de nuestro país:

LAT.	s
15°	$196^{M}.03$
21	196 .20
27	196 .40
33	196 .64

y para su latitud media $s = 196^{M}.3$, que puede adoptarse como constante para toda la República, obteniéndose entonces con la precisión necesaria:

$$e = \frac{S}{196.3}$$

La superficie S del triángulo podrá medirse en un cróquis, tomando la base y la altura en kilómetros, á fin de que S resulte también en miriaras como s. Por ejemplo en nuestro triángulo se halla $S = 878$ miriaras, por lo cual su exceso esférico será:

$$e = \frac{878.0}{196.3} = 4''.47$$

valor casi idéntico al encontrado por el cálculo de la fórmula (10).

69.—La exposición de los tres métodos principales para resolver los triángulos geodésicos, espero que habrá dado á conocer la inmensa superioridad que sobre los otros dos tiene el de Legendre. Es, en efecto, el único que se sigue hoy, y debe notarse que para demostrar el teorema que le sirve de fundamento, hemos llevado la aproximación hasta los términos de cuarto orden, circunstancia que desde luego manifiesta que el procedimiento es exacto aun respecto de los mayores triángulos que es posible formar sobre la tierra.

El modo de guiar los cálculos de una cadena trigonométrica con el objeto de evitar la acumulación de pequeños errores, se ha explicado ya con suficiente extensión en el Capítulo VI de la Topografía, y, por lo mismo, juzgo inútil repetirlo aquí. Es raro, sin embargo, que una triangulación geodésica se extienda en todos sentidos ó cubra del todo un país, aun cuando el objeto sea el de servir de apoyo á grandes operaciones topográficas; pues por lo regular sólo se establecen cadenas paralelas de Norte á Sur y de Oriente á Poniente ligadas entre sí para que formen un conjunto bien enlazado. El calculador debe proceder de manera que se procure comprobaciones en aquellos lados que sean comunes á dos cadenas contiguas, atendiendo siempre á las condiciones geométricas de la figura. (1)

La fórmula que he desarrollado (Tomo I, número 92) para hacer concordar dos bases, ó en general, los cálculos que se refieren á un mismo lado, se aplica también á la Geodesia con el mismo objeto. Igualmente es aplicable á una triangulación geodésica el procedimiento que expuse para corregir los cálculos preliminares y los que hayan partido de una base errónea (Tomo I, números 93 y 94).

También importa advertir que siempre que se ofrezca combinar los ángulos de una cadena geodésica, deben corregirse por la tercera parte del exceso esférico del triángulo á que pertenezcan; pues hemos visto que esta es la condición indispensable, según el teorema de Legendre, para ejecutar los cálculos como si se tratase de triángulos planos, Así, para reducir á la línea recta una base que se haya medido en dos ó más segmentos que formen entre sí ángulos muy obtusos (Tomo I, número 27), para determinar la posición de un punto por medio de la observación de los ángulos entre tres ó más vértices (Tomo I, números 72 y 101), etc., es preciso calcular el exceso esférico del triángulo de que forme parte cada uno de los ángulos que han de entrar en la combinación, y antes de hacerla, restarles la tercera parte de esa cantidad.

(1) Las personas que deseen más amplia instrucción respecto del mejor modo de satisfacer simultáneamente las diversas condiciones geométricas de una figura, pueden consultar la obra de Gauss, titulada: "*Suplementum theoriæ combinationis, etc.*," Gottingen, 1828. Galloway, en las "*Memoirs of the Astronomical Society for* 1844", ha presentado aplicaciones muy interesantes de esta materia á la triangulación de Inglaterra. En la publicación que anualmente se hace en los Estados Unidos con el título de "*Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey,*" en el volumen correspondiente á 1854, consta detalladamente esa teoría con numerosas aplicaciones. Por desgracia la extensión de la materia no permite su exposición en una obra elemental.

CAPITULO VII.

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS DE LOS VÉRTICES.

70.—El conocimiento de las coordenadas geográficas de las estaciones trigonométricas suministra los medios de asignar á la cadena la posición que realmente ocupa sobre el globo. La determinación de la latitud y de la longitud de un punto, así como la del azimut de una línea, constituyen las aplicaciones más importantes de la Astronomía á la Geodesia; pero se comprende fácilmente que no es necesaria la medida directa de esos elementos para cada uno de los vértices; porque conocida la posición geográfica de uno solo y el azimut de un lado, es posible situar las demás estaciones y orientar la cadena, por el enlace íntimo que existe entre todas sus partes. Sin embargo, como es interesante conocer la posición geográfica de cada uno de los vértices trigonométricos para poderlos fijar en la carta independientemente unos de otros, y sería muy dilatada y casi impracticable la medida directa de todas ellas por procedimientos astronómicos, vamos á exponer el método que debe seguirse para calcular las posiciones, conociendo la de un punto por lo menos y el azimut de un lado, datos que suponemos obtenidos por observaciones astronómicas directas, y de las cuales me ocuparé en la última parte de este libro.

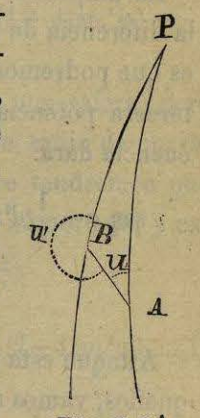

FIG 20A