lescopio, de manera que las distancias zenitales de los objetos que se observen en la intersección de los hilos, serán las mismas que si se hubieran observado en la intersección del hilo horizontal con el eje óptico. Según esto, la colimación del hilo vertical del centro no afecta de un modo perceptible la medida de los ángulos verticales.

52.—No sucede lo mismo en la medida de los ángulos azimutales, puesto que la distancia constante c abraza en la esfera arcos de amplitud creciente al paso que disminuyen las distancias zenitales de los objetos. En efecto, al girar el instrumento horizontalmente con el telescopio inclinado hacia una región de la esfera cuya distancia zenital sea z', describe la línea de colimación una superficie cónica que tiene por base un círculo menor paralelo al horizonte y cuyo radio es el seno de la distancia zenital. Como las amplitudes de los arcos de igual extensión son inversamente proporcionales á sus radios, tendremos que los círculos verticales que pasan por el eje óptico y por la línea de colimación, interceptarán en el horizonte el arco C que resulta de la proporción sen. $z':1::c:C$, de la cual se obtiene:

$$C = \frac{c}{\text{sen.}\, z'}$$

Esta fórmula da á conocer que la influencia del error de colimación es muy grande cerca del zenit, y de menos importancia cerca del horizonte, á causa de que sen. z' llega á su *máximum* en ese plano. Cuando los objetos que se observan tienen poca altura, el valor de C es casi constante, puesto que apenas difieren entre sí los senos de los ángulos muy próximos á 90°.

Tomando en cuenta el efecto de la colimación, vemos que la expresión más general del ángulo formado por dos señales, es:

$$A = a'_2 - a'_1 + (d_2 \cot. z'_2 - d_1 \cot. z'_1) + \left[\frac{1}{\text{sen.}\, z'_2} - \frac{1}{\text{sen.}\, z'_1}\right] c \quad \ldots..(12)$$

en la que designo con índices numéricos los elementos que se refieren á los dos objetos, siendo a' la lectura angular del círculo azimutal, d la indicación del nivel montante, c el error de colimación y z' la distancia zenital aproximativa. Las lecturas a' se suponen ya corregidas por el error de curso de los micrómetros, si es que existe, las inclinaciones d se calculan por la fórmula (5) y la colimación por la (9) ó la (10), según el caso.

La ecuación (12) indica que cuando se observe el mismo ángulo en las dos posiciones inversas del instrumento, la colimación producirá efectos contrarios y numéricamente iguales, por lo cual el promedio de los dos resultados es independiente de este error. Lo mismo se verifica, según dijimos, respecto de la corrección por el estado del nivel en el caso de ser la columna sensiblemente vertical; y esto se conoce desde luego por el nivel paralelo al círculo vertical, que debe dar la misma lectura en todo el curso de una revolución, ó por el nivel montante que denunciará inclinaciones numéricamente iguales y de signos contrarios en las dos posiciones inversas del altazimut.

53.—Una vez bien comprendida la construcción del altazimut, nada de nuevo hay que añadir á lo que se dijo en la Topografía respecto del modo de medir los ángulos. La única diferencia consiste en que no siendo repetidor este instrumento, permanece fijo el limbo horizontal, y se dirigen las visuales valiéndose del movimiento general de su parte superior, que lleva consigo los micrómetros. Todas las instrucciones dadas allí son aplicables con más razón á la Geodesia, cuyas operaciones deben ofrecer un tipo de precisión, y que, en consecuencia, demandan todo género de precauciones que tiendan á garantizar la exactitud de los resultados.

La reducción al centro de estación, cuando sea preciso aplicarla, se calcula por las mismas fórmulas que expuse en el Tomo I, así como la resolución del problema de los tres vértices, etc., con las modificaciones que se indicarán en el Capítulo relativo á la resolución de los triángulos geodésicos, y que se reducen á hacer las correcciones de los ángulos por el exceso esférico; pero los procedimientos del terreno son absolutamente iguales, y los mismos también los datos que deben tomarse para poder aplicar la resolución correspondiente.

Los partidarios de los instrumentos repetidores atribuyen al teodolito, respecto del altazimut, la ventaja de prestarse á medir un mismo ángulo con distintas partes de la graduación; pero atendiendo á la perfección á que ha llegado el arte de dividir, creo que esta ventaja no es por sí sola bastante grande para compensar la que proporciona la mayor exactitud que se alcanza con la sustitución del micrómetro al vernier, y la condición de estabilidad, que abogan en favor del altazimut. Por otra parte, se mide también con el altazimut el mismo ángulo en diversas partes de su limbo, haciendo uso de un tripié, llamado *repetidor*, cuya meseta es susceptible de movimiento al derredor de un eje vertical. De ese modo, terminada la medida del ángulo en la posición que tenía el altazimut, se comunica un movimiento angular arbitrario á la meseta, á fin de que una nueva parte de la graduación sirva para volver á medir el ángulo. No he tenido ocasión de emplear tripiés de esta clase; pero temo que con ellos se disminuya la firmeza del aparato, que es una de sus condiciones más esenciales: y si se quiere dar mucha importancia á la ventaja de variar el arco del limbo que mide un ángulo, me parecería preferible cambiar la posición del altazimut mismo, lo cual sólo demandaría un nuevo examen de los niveles para volver á establecer la verticalidad y la horizontalidad de los ejes. Esta operación es muy breve teniendo ya corregidos los niveles.

Midiendo ángulos con un altazimut, he seguido un método que, si no tiene la ventaja de que antes se ha hablado, sí permite disminuir los pequeños errores de observación, de graduación y de lectura. Consiste en visar cada señal con cada uno de los 5 hilos verticales de la retícula en sus puntos de intersección con el horizontal del centro. Para evitar confusión al aplicar este procedimiento, designaré con el nombre de posición primera ó directa del instrumento aquella en que el círculo vertical mida distancias zenitales; y con el de posición segunda ó inversa aquella en que mida alturas. La primera corresponde generalmente al caso en que el círculo vertical queda á la derecha del observador. Asentado esto, admitamos que se haya asignado un número á cada hilo de izquierda á derecha, que es el orden que generalmente sigue la numeración del limbo; y de esa manera,

si se hace coincidir con el primer hilo la imagen invertida de una señal, se tiene una indicación menor que si se hace coincidir con el segundo ó con cualquiera de los demás.

Supongamos ahora que al medir un ángulo se vise la señal de la izquierda con cada uno de los hilos en el orden de su numeración, leyendo siempre los dos micrómetros del círculo horizontal, y sean a, b, c, d y e los cinco promedios obtenidos. Llamando m su medio aritmético, tendremos.

$$m = \frac{1}{5}(a+b+c+d+e)$$

y podrá considerarse á m como la indicación correspondiente á un hilo imaginario, que para distinguirlo del tercero ó central, llamaré *hilo medio*. Si los 5 hilos de la retícula fuesen exactamente equidistantes, y no hubiese error alguno de observación ó de lectura, m debería ser igual á c; pero no debiendo contar en general con esa perfección, la indicación m del hilo medio es digna de más confianza que la simple lectura correspondiente al hilo central. Al llevar el telescopio á la segunda señal, hallaremos de una manera semejante:

$$m' = \frac{1}{5}(a'+b'+c'+d'+e')$$

y el ángulo que se busca tendrá por medida $m' - m$, en lugar de $c' - c$ que se hubiera obtenido con el tercer hilo solamente. Se ve que este procedimiento equivale á medir el ángulo en cada uno de los hilos, y á tomar el término medio, pues se tiene:

$$m' - m = \frac{1}{5}[(a'-a)+(b'-b)+(c'-c)+(d'-d)+(e'+e)]$$

Terminada la medida en la primera posición, se pasa á la segunda ó inversa, en la cual los mismos hilos se presentan en orden contrario, esto es: el 5º como 1º, el 4º como 2º, etc. Designando con letras mayúsculas los resultados semejantes obtenidos en la primera posición, tendremos por valor del mismo ángulo:

$$M'-M = \frac{1}{5}[(A'-A)+(B'-B)+(C'-C)+(D'-D)+(E'-E)]$$

Y entonces el resultado definitivo será:

$$R=\frac{1}{2}[(M'+m')-(M+m)]$$

El altazimut á que me he referido no tenía micrómetro en el círculo horizontal, sino tres vernieres distantes 120° uno de otro, de modo que para obtener los cuatro promedios que entran en la ecuación precedente era preciso hacer 60 lecturas. Hay, pues fundamento para creer que el resultado final queda libre de los pequeños errores accidentales de observación, de lectura, de graduación, etc. Aunque penoso si se quiere, es conveniente este método, porque proporciona también la ventaja de poder examinar y discutir por separado el resultado que proviene de cada vernier y de cada hilo. Teniendo el círculo solamente dos vernieres ó micrómetros á distancia de 180°, será 40 el número total de lecturas, puesto que se hacen 20 en cada posición del instrumento.

Cuando se aplique este procedimiento en una sola posición del altazimut y se tema la influencia del error de colimación, es preciso tener presente al corregir los promedios m y m' ó M y M', que estos corresponden á la indicación del hilo medio, el cual puede no coincidir con el central á consecuencia de algún pequeño error en la equidistancia de los hilos. La colimación del hilo medio será, por consiguiente, igual á la del central sumada con la diferencia $c-m$ ó $c'-m'$ de sus indicaciones. El valor de esta diferencia se determina por muchas observaciones de objetos lejanos situados muy cerca del horizonte, ó por las de un colimador establecido también horizontalmente.

54.—En las triangulaciones que se ejecutan con instrumentos repetidores, se toman generalmente varias series de cada ángulo, dependiendo el número de observaciones de cada serie de la mayor ó menor concordancia que ofrezcan sus resultados individuales. Mr. Puissant considera que, en circunstancias favorables, es suficiente hacer 3 series de observaciones de un ángulo, teniendo cada serie unas 20 repeticiones, para alcanzar la precisión necesaria.

Sería de desearse que todos los ángulos de una cadena geodésica

se midiesen un mismo número de veces y en igualdad de circunstancias; pero esto casi nunca puede lograrse. Cuando se toman los ángulos desde una estación que sea vértice común de varios triángulos, es muy frecuente que no todas las señales se distingan con la misma claridad. Sus distancias, sus alturas, la posición del sol respecto del observador, etc., son otras tantas causas que se oponen á la identidad de condiciones, y que por tanto hacen variar el grado de certidumbre en la dirección de las visuales; y aun sucede á veces que alguna ó algunas señales no se perciben á la hora en que se observan las demás. Entonces el ingeniero se ve en la necesidad de proceder á la medida de sus ángulos en circunstancias diferentes, siéndolo también, por consiguiente, el grado de confianza que deposita en los resultados parciales, al cual debe atender cuando se trata de combinar los diversos valores que haya obtenido para el mismo elemento.

El grado relativo de certidumbre puede reducirse á guarismos de un modo más ó menos arbitrario. Así, por ejemplo, si un observador representa con el número 10 la confianza que tiene en la dirección de una visual cuando todas las condiciones de luz, transparencia de la atmósfera, hora del día, etc., le son muy favorables, y con el 1 las circunstancias enteramente contrarias, en las que pueda apenas distinguir vagamente la señal, podrá establecer diez grados de confianza representados por los números 1, 2, 3, ... 10. Entonces al lado de cada observación anotará el guarismo de esta escala, equivalente á la seguridad que le atribuya; y cuando trate de combinar dos ó más resultados individuales para deducir de ellos un promedio general, deberá tomar en cuenta el número que corresponda á cada observación, procurando que el resultado de la combinación se acerque más á los parciales anotados como más dignos de confianza. Para esto notemos que cuando dos observaciones tienen inscritos, por ejemplo, los guarismos 3 y 8, se ha querido indicar que se concede á la primera tanta confianza como á 3 observaciones de la clase inferior representada por el guarismo 1, y se juzga á la segunda equivalente á 8 de la misma clase; así es que el promedio de ambos resultados podrá estimarse con una confianza de $3+8$; porque lo consideramos equivalente, en efecto, á 11 observaciones cuyo grado de certidumbre fuese 1. Si designamos, pues, por $a+x_1$, $a+x_2$, $a+x_3$, ... $a+x_n$ los n resultados parciales que se hayan obtenido midiendo una magnitud cualquiera, y por $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$, los guarismos que miden su certidumbre relativa, el promedio m será digno de un grado de confianza representado por $p_1+p_2+p_3 \ldots p_n$, y estableceremos la ecuación:

$$(p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots p_n)m=(a+x_1)p_1+(a+x_2)p_2+(a+x_3)p_3+\ldots\ldots$$
$$+\ldots\ldots(a+x_n)p_n$$

de la cual se obtiene:

$$m=\frac{(a+x_1)p_1+(a+x_2)p_2+(a+x_3)p_3+\ldots\ldots\ldots(a+x_n)p_n}{p_1+p_2+p_3\ldots\ldots\ldots p_n}$$

La cantidad representada por p, que expresa la seguridad relativa de un resultado, se designa generalmente con el nombre de *peso* pa de ese resultado. Según esto, la fórmula anterior manifiesta que para tomar el promedio se multiplicará cada resultado individual por su peso, y la suma de los productos se dividirá por la de los pesos.

En la ecuación precedente he supuesto que todos los resultados individuales constan de una parte común a y otra variable x, lo cual siempre es cierto; porque basta tomar por a el menor de los resultados. Este artificio tiene por objeto simplificar el cálculo de los promedios, reduciéndolo al de cantidades más pequeñas, pues ejecutando las operaciones indicadas en la fórmula anterior y reduciendo, se halla:

$$m=a+\frac{p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\ldots\ldots\ldots p_nx_n}{p_1+p_2+p_3\ldots\ldots\ldots p_n}\ \ldots\ldots\ldots(13)$$

Se ve que el valor del promedio se compone también de la parte constante a y del promedio de las variables, obtenido por la aplicación de la regla anterior.

Cuando todos los resultados se juzguen dignos de la misma confianza, haremos $p_1=p_2=p_3$, etc., y el valor de m será:

$$m=a+\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots x_n}{n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

expresión de los términos medios aritméticos comunes.

55.—El medio que he indicado para estimar el peso de cada resultado, aunque más ó menos vago por su misma naturaleza, es acaso el único que más directamente expresa la idea que puede uno formarse de la bondad relativa de una observación aislada, y por arbitrario que parezca, lo es indudablemente menos que la igual apreciación de todos los resultados que se obtengan en condiciones diversas. Voy á indicar otro procedimiento acaso más libre de arbitrariedad, puesto que se funda en la concordancia y número de un conjunto de observaciones, tal como el de los diversos resultados que se obtienen en la medida de una misma línea ó de un mismo ángulo.

En el orden moral como en el físico experimentamos una tendencia irresistible, y por otra parte muy justa, para atribuir mayor grado de probabilidad á un hecho cualquiera, mientras más grande es el número de pruebas que lo atestiguan, y menores son las discordancias de éstas. Así, cuando se nos refiere un acontecimiento que no hemos presenciado, si hay varios testigos que lo afirman y todos ellos están poco discordes en los rasgos principales ó característicos del suceso, nos sentimos inclinados á creerlo cierto, ó al menos lo consideramos como muy probable. Si el número de testigos es sumamente grande á la vez que no hay discrepancia alguna entre ellos respecto de todos los pormenores del hecho, entonces adquirimos una confianza tal en su veracidad, que casi iguala á la certidumbre que tendríamos si lo hubiéramos presenciado. Por el contrario, la duda crece en nuestro ánimo al paso que disminuye el número de testigos, ó que éstos están más discordes en sus respectivos relatos; y esta duda puede llegar á tal grado, que no admitamos en lo absoluto la realidad del acontecimiento. Lo mismo sucede en lo físico: si, por ejemplo, las medidas reiteradas de una línea dan cortísimas diferencias y son en número muy crecido, afirmamos que el resultado final se acerca mucho á la exactitud; y si las diferencias son nulas, adquirimos la certidumbre de que la medida es exacta, por lo menos hasta donde puede serlo con nuestros medios de experimentación. Cuando es pequeño el número de medidas individuales, y presentan, además, fuertes discordancias, aseguramos fundadamente que el resultado es incierto, y no le concedemos confianza alguna.

Hay, pues, cierto enlace entre estos dos elementos, á saber: el número de pruebas y sus discordancias, que puede servir muy bien para medir la bondad de un resultado. Trataré de expresarlo en el lenguaje algebraico: Si $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots\ldots r_n$, son los resultados individuales que se obtienen al medir cierta magnitud, el valor que se adopta como exacto ó al menos como más plausible, es el promedio m de todos ellos, calculado por las fórmulas (13) ó (14). De consiguiente, los residuos $m - r_1, m - r_2, \ldots\ldots\ldots m - r_n$ miden las discordancias entre el valor que se considera como el verdadero y el que da cada resultado aisladamente. De estas restas, unas son positivas y otras negativas, de suerte que su suma algebraica siempre es nula, y por tanto no podremos tomar su medio aritmético; pero si se elevan al cuadrado, se suman y se divide la suma por su número, se obtendrá el cuadrado medio de las discordancias ó errores:

$$e^2 = \frac{(m-r_1)^2 + (m-r_2)^2 + \ldots\ldots\ldots (m-r_n)^2}{n}$$

y si por abreviación representamos por el signo $\Sigma(m-r)^2$ la suma de los términos semejantes, y extraemos la raíz, resulta:

$$e = \sqrt{\frac{\Sigma(m-r)^2}{n}}$$

cantidad que puede tomarse por la discordancia ó error medio que corresponde á cada uno de los n resultados parciales.

El valor de e disminuye cuando crece n ó cuando mengua la suma de los cuadrados de los errores; y puesto que se concede á un resultado una confianza tanto mayor cuanto más pequeño es su error me-

dio, podremos medir su precisión relativa por una cantidad q en razón inversa de e, ó lo que es lo mismo:

$$q = \sqrt{\frac{n}{\Sigma(m-r)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

y aplicando esta fórmula se conseguirá asignar á cada serie de observaciones una precisión relativa, derivada de la concordancia y del número de sus resultados. Tomemos, como ejemplo, las dos series siguientes, que se suponen ser las diversas medidas de una misma línea:

PRIMERA SERIE.	SEGUNDA SERIE.
	1974^m.14
	1974 .16
1974^m.10	1974 .13
1974 .18	1974 .17
1974^{m}14 ....Promedios	.... 1974^m.15

He supuesto que todos los resultados se juzgaron dignos de igual confianza y por eso se han tomado los promedios por el método común; de lo contrario, se habría aplicado la fórmula (13). Tomando por parte constante $a = 1974^m.10$, dispondremos el cálculo como sigue:

$m-r$	$(m-r)^2$	$[m-r]$	$[m-r]$
		$+0^m.01$	0.0001
		$-0\ .01$	0.0001
$+0^m.04$	0.0016	$+0\ .02$	0.0004
$-0^m.04$	0.0016	$-0\ .02$	0.0004
$\Sigma(m-r)^2 =$	0.0032	$\Sigma(m-r)^2 =$	0.0010
$q = \sqrt{\frac{2}{0.0032}} = 25.0$		$q = \sqrt{\frac{4}{0.0010}} = 63.2$	

Si se quieren combinar ahora los dos promedios atendiendo á su mérito relativo para hallar el resultado final, aplicaremos la fórmula (13), á saber:

$$M = 1974^m.10 + \frac{0.04 \times 25.0 + 0.05 \times 63.2}{88.2} = 1974^m.147$$

Combinando los dos promedios sin atender á su grado de precisión, se habría hallado $1974^m.145$. La diferencia de los dos resultados es insignificante en este ejemplo, á causa de la pequeñez de todas las discordancias; pero hay muchos casos en que no es así, y entonces sería muy arbitrario asignar á todas las series el mismo grado de confianza.

En el ejemplo que sigue, se ha hecho la apreciación de la seguridad relativa de cada resultado individual al medir el mismo ángulo.

	Resultados.	Pesos.	Resultados.	Pesos.	Resultados.	Pesos.
	47° 53′ 17″.3	6	47° 53′ 14″.9	4	47° 53′ 17″.9	8
	„ „ 15 .2	2	„ „ 17 .0	7	„ „ 18 .5	10
	„ „ 16 .8	5	„ „ 17 .7	9	„ „ 16 .4	9
			„ „ 16 .1	10		
Promeds.	47° 53′ 16″.8		47° 53′ 16″.6		47° 53′ 17″.6	

Los pesos de los tres promedios serían respectivamente 13, 30 y 27, de modo que de la combinación resultaría:

$$m = 47° 53' 16''.0 + \frac{0.8 \times 13 + 0.6 \times 30 + 1.6 \times 27}{70} = 47° 53' 17''.02$$

Si se quiere prescindir de los pesos apreciados para calcular la precisión de cada promedio por el número y la concordancia de las observaciones, tendremos:

$m-r$	$[m-r]^2$	$m-r$	$[m-r]^2$	$m-r$	$[m-r]^2$
$-0''.5$	0.25	$+1''.7$	2.89	$-0''.3$	0.09
$+1\ .6$	2.56	$-0\ .4$	0.16	$-0\ .9$	0.81
$0\ .0$	0.00	$-1\ .1$	1.21	$+1\ .2$	1.44
		$+0\ .5$	0.25		
	2.81		4.51		2.34
$q = 1.03$		$q = 0.94$		$q = 1.13$	

$$m = 47° 53' 16''.0 + \frac{0.8 \times 1.03 + 0.6 \times 0.94 + 1.6 \times 1.13}{3.10} = 47° 53' 17''.03$$

Se ve que aunque el resultado final es casi el mismo, este último

procedimiento asigna mayor mérito á la tercera serie; mientras que la apreciación del observador atribuyó más confianza á la segunda.

La fórmula (15) manifiesta que para valores iguales de $m-r$, las precisiones son proporcionales á la raíz cuadrada del número de observaciones. Así es que cuando las discordancias sean poco más ó menos las mismas, podrá multiplicarse cada promedio por $\sqrt{n}$ para hacer la combinación. Esto es lo que debe practicarse cuando se miden los ángulos con un instrumento repetidor; porque lo que se obtiene es ya un promedio de n repeticiones, cuyas discordancias pueden suponerse comprendidas dentro de los mismos límites, si es que todas las observaciones se han ejecutado en circunstancias semejantes. Tomemos por ejemplo las tres series siguientes obtenidas con un teodolito.

Resultados.	n	$\sqrt{n}$
65° 34′ 42″.7	5	2.24
„ „ 45 .0	10	3.16
„ „ 44 .1	15	3.87
		9.27

$$m = 65° 34' 42''.0 + \frac{0.7 \times 2.24 + 3.0 \times 3.16 + 2.1 \times 3.87}{9.27} = 65° 34' 44''.07$$

56.—Cuando se toma un término medio aritmético por el método común, siempre es sensiblemente nula la suma algebraica $\Sigma(m-r)$ de las discordancias; pero si prescindimos de sus diversos signos para no considerar más que sus valores numéricos, podrá calcularse con más facilidad una discordancia media, que no es otra cosa más que la suma de los valores numéricos de las $m-r$, dividida por su número. Designando por $S(m-r)$ esta suma, la discordancia media y la precisión derivada de ella, serán respectivamente:

$$e = \frac{S(m-r)}{n} \qquad \pi = \frac{n}{S(m-r)} \text{ .... } (16)$$

El valor de π podrá emplearse en lugar del de q que suministra la fórmula (15). Así, en el ejemplo relativo á las medidas de la misma línea, las dos series dan:

$$\pi = \frac{2}{0.08} = 25.0 \qquad \pi = \frac{4}{0.06} = 66.7$$

y el promedio final será, por consiguiente:

$$m = 1974^{m}.10 + \frac{0.04 \times 25.0 + 0.05 \times 66.7}{91.7} = 1974^{m}.147$$

y en el primer ejemplo que se refiere á las medidas angulares, se obtiene por las tres series:

$$\pi = \frac{3}{2.1} = 1.42 \qquad \pi = \frac{4}{3.7} = 1.08 \qquad \pi = \frac{3}{2.4} = 1.25$$

$$m = 47°53'16''.0 + \frac{0.8 \times 1.42 + 0.6 \times 1.08 + 1.6 \times 1.25}{3.75} = 47°53'17''.01$$

En las expresiones (15) y (16) he procurado formular de una manera sencilla las indicaciones del buen sentido para combinar diversas observaciones más ó menos discordes, y creo que el método expuesto es propio para llenar todas las exigencias de la práctica. Sin embargo, la teoría matemática de las probabilidades conduce á las siguientes fórmulas para calcular el mérito relativo de las observaciones. Según que se haga uso de la suma de los cuadrados de los residuos, ó bien de los residuos mismos con abstracción de sus signos, el error medio de una sola observación es:

$$E = \sqrt{\frac{\Sigma(m-r)^2}{n-1}} \qquad E = 1.2533\,\frac{S(m-r)}{n}$$

y entonces se tiene:

Error medio del promedio......... $e = \dfrac{E}{\sqrt{n}}$

Error probable de una observación. $R = 0.6745\sqrt{\dfrac{\Sigma(m-r)^2}{n-1}} = 0.8453\,\dfrac{S(m-r)}{\sqrt{n(n-1)}}$

Error probable del promedio...... $r = \dfrac{R}{\sqrt{n}}$

Precisión de una observación...... $P = \dfrac{0.4769}{R}$

Precisión del promedio............ $p = P\sqrt{n}$

En cuanto á los *pesos*, se consideran proporcionales á los cuadrados de las precisiones, ó sea inversamente proporcionales á los cuadrados de los errores medios de las observaciones.

57.—Sería dilatado y de poca utilidad hacer el desarrollo de estas últimas fórmulas, por exigir la exposición previa de los principios en que se funda el cálculo de las probabilidades. Sólo indicaré el sentido en que debe tomarse el error probable. Entre los errores que pueden influir en el resultado de una observación, es preciso distinguir los constantes de los accidentales. Los primeros son aquellos que en igualdad de circunstancias adquieren la misma magnitud, y también por lo regular el mismo signo; ó que al menos están sujetos á leyes regulares y conocidas. Los errores accidentales no están sujetos en la apariencia á leyes fijas, y obran de una manera variable aun en igualdad de circunstancias. A los errores constantes pertenecen los que pueden provenir de una teoría inexacta, de la omisión de algún elemento importante en la observación ó en el cálculo, del uso de un instrumento incorrecto ó defectuoso, etc., y todos ellos pueden convertirse en correcciones luego que se conoce su magnitud y su influencia. Entre los errores accidentales deben clasificarse los que se originan de la imperfección de nuestros sentidos, que necesariamente tienen un límite de percepción; los que son producidos por causas exteriores que no es fácil prever ni tomar en cuenta, como los pequeños movimientos que experimentan las diversas partes de un instrumento por la acción de la elasticidad de su materia, de los cambios de temperatura, de la dirección en que obra la gravedad, etc., etc.

A medida que se ensanchan los límites de nuestros conocimientos es natural que vaya disminuyendo el número de los errores accidentales, en atención á que van comprendiéndose sus causas ó las leyes que los rigen; pero aunque en la actualidad no se pueda juzgar con acierto acerca del modo de obrar de cada uno de ellos en particular, sí se conocen experimentalmente algunas leyes generales á que está sujeto su conjunto, como son las siguientes: 1ª Los errores accidentales de igual magnitud se producen por exceso con la misma frecuencia que por defecto, al menos en una serie numerosa de observaciones. 2ª Para cada clase de observaciones existe cierto límite del que nunca exceden los errores accidentales. 3ª La frecuencia con que se producen no es la misma para todos los valores de que sea susceptible el error, sino que, por el contrario, son más frecuentes los pequeños que los grandes.

Estas tres leyes generales, especialmente la última, sirven de base para el cálculo de las probabilidades en sus investigaciones respecto de los errores accidentales, partiendo de la condición de que la frecuencia, ó sea la probabilidad de un error, es una función dependiente de su magnitud. De esta manera se llega al desarrollo de las fórmulas que antes se han expuesto, y cuyo objeto es la comparación de diversas series de observaciones; comparación que se hace por la magnitud de sus errores medios, por la de sus precisiones relativas, ó por la de sus errores probables. Si todos los errores de que sea susceptible una observación se suponen arreglados en el orden de sus magnitudes, el que ocupa el medio de la serie es el que se designa con el nombre de *error probable*. La probabilidad de este error se dice que es $\frac{1}{2}$, lo cual significa que hay tanta probabilidad de que el error efectivo sea mayor, como la hay de que sea menor que el llamado probable. Se comprende, según esto, que la comparación de dos ó más series de observaciones puede reducirse á la de sus respectivos errores probables, en atención á que éstos ocupan el mismo lugar entre los errores posibles de cada serie.

Para que el error probable tenga realmente la significación que se ha explicado, es indispensable que antes de calcularlo se hayan destruído todos los errores constantes de que sea susceptible el resultado de una observación. Por esta causa, para comparar por este método dos ó más resultados, no deben omitirse las correcciones instrumentales, y las que demande una teoría inexacta, aplicando en general todos aquellos procedimientos que hagan variar las circunstancias de una observación ó que tiendan á eliminar las causas de error constante.

58.—Esta es la ocasión de indicar otro error que suele influir en las observaciones angulares, y que debe llevarse en cuenta especialmente cuando se emplee un instrumento de precisión cuyas lecturas

se puedan aproximar hasta los segundos. Si los gruesos de las señales geodésicas se ven bajo un ángulo apreciable, suele suceder que por la posición del sol respecto de ellas, una sola de sus partes se presenta iluminada al observador, el cual en este caso dirige su visual hacia la mitad de la parte iluminada, que es la que distingue. Sucederá entonces, por lo regular, que la visual no pasa por el centro de la señal, y se producirá un pequeño error angular en la indicación del instrumento, llamado *error de fase*. Veamos el modo de determinarlo, á fin de corregir la lectura del círculo azimutal.

Supongamos que sea rectangular la sección de la señal, y $m\,n$ (fig. 17ª) su cara iluminada. El observador en C al medir el ángulo entre un punto A y el centro O de la señal, visa próximamente hacia el medio D de $m\,n$, dividiendo en dos partes sensiblemente iguales al ángulo $m\,C\,n$, bajo el cual distingue la parte alumbrada $m\,n$. El error de fase que comete es, por consiguiente, el pequeño ángulo $x = D\,C\,O$. Designando por r la distancia $O\,D$, tendremos en el triángulo $O\,D\,C$:

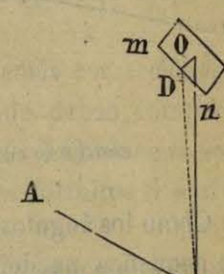

FIG. 17ª

$$\text{sen.}\,x = \frac{r\,\text{sen.}\,D\,O\,C}{D\,C}$$

Como los lados geodésicos son inmensamente grandes respecto de las dimensiones de las señales, podrá tomarse sin error perceptible el lado $O\,C = k$, por $D\,C$. Llamando O el ángulo $D\,O\,C$, y expresando en segundos la pequeña corrección x, resultará:

$$x = \frac{r\,\text{sen.}\,O}{k\,\text{sen.}\,1''} \quad \text{.........................} \quad (17)$$

El lado k se obtiene por una resolución aproximativa de los triángulos, y el ángulo O se mide con suficiente exactitud al estacionar en la misma señal.

Cuando se hace uso de señales cilíndricas ó cónicas, tendrán circular su sección, como lo indica la figura 18ª Si $S\,O$ representa la dirección de los rayos del sol, resulta que el semicírculo $H\,F\,D\,G$

representará la parte iluminada, la cual ve el observador bajo el ángulo FCG, y al dirigir su visual dividiendo en partes iguales ese pequeño espacio, observa el punto D en lugar del centro O, y comete por tanto el error $x = DCO$. Designemos por s el ángulo $DCG = DCF$, y entonces se tendrá: $FCO = s + x;\ OCG = s - x$; y los triángulos FCO, OCG, el primero de los cuales es rectángulo, darán respectivamente, llamando r el radio de la señal y k el lado OC, que es sensiblemente igual á CF y á CG:

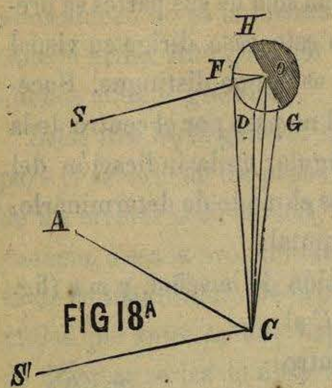

FIG 18ᴬ

$$\text{sen.}(s+x) = \frac{r}{k} \qquad \text{sen.}(s-x) = \frac{r}{k}\ \text{sen.}\ O$$

Como los ángulos $s + x$ y $s - x$ son en todos casos extremadamente pequeños, pueden tomarse en lugar de sus senos, y expresados en segundos serán:

$$(s+x)\,\text{sen.}\,1'' = \frac{r}{k} \qquad (s-x)\,\text{sen.}\,1'' = \frac{r}{k}\ \text{sen.}\ O$$

Restando una de otra estas ecuaciones, se obtiene:

$$2x\,\text{sen.}\,1'' = \frac{r}{k}\,(1 - \text{sen.}\,O)$$

El ángulo $O = COG$ puede expresarse en función del ángulo $S'CO = U$ formado en C por la dirección del sol con la de la señal. Para esto notemos que en virtud del paralelismo de SO y $S'C$, se tiene: $SOC = 180° - U$; pero también $SOC = 90° - O$; luego resultará: $O = U - 90°$, ó bien sen. $O = -$cos. U. Sustituyendo en la fórmula precedente y recordando que $1 + \cos U = 2\cos.^2 \frac{1}{2} U$, se hallará en último resultado:

$$x = \frac{r \cos.^2 \frac{1}{2} U}{k\,\text{sen.}\,1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Dirigiendo una visual al sol y otra á la señal, se tendrá el ángulo U entre los dos objetos; pero como el azimut del sol varía continuamente, deberá medirse ese ángulo al principio y al fin de la serie de observaciones angulares, con el objeto de adoptar el término medio por valor de U. Es claro que no se necesita mucha precisión en este dato, y así es que al visar el sol se procurará únicamente que su disco quede dividido en dos partes casi iguales por el hilo vertical del centro.

La corrección x será aditiva al ángulo ACD, siempre que la señal A y el sol se hallen hacia el mismo lado respecto del observador, y substractiva en el caso contrario, como se comprende desde luego por la figura.

Después de practicadas esta y todas las demás correcciones, de que sucesivamente me he ocupado, es cuando deben compararse los resultados de las medidas angulares, cuyas discordancias serán, en tal caso, debidas únicamente á los errores fortuitos ó accidentales.

Los errores de observación se determinan comparando la suma de los tres ángulos de cada triángulo con la que teóricamente debían producir, como se indicó en la Topografía; pero como no son planos los triángulos geodésicos, la suma de sus tres ángulos, en lugar de ser de 180°, será igual á $180° + e$, siendo e el *exceso esférico* que aprenderemos á calcular en el Capítulo siguiente. En consecuencia, si designamos por A, B y C los ángulos observados, la suma de sus correcciones será:

$$\varepsilon = 180° + e - (A + B + C)$$

la cual debe distribuirse por partes iguales entre los tres ángulos.

Para terminar lo relativo á las medidas angulares, sólo falta añadir que al ocupar cada estación deben tomarse las distancias zenitales de todos los vértices visibles desde ella, á fin de obtener el elemento necesario para determinar sus diferencias de nivel por el método trigonométrico expuesto en el número 257 y siguientes del primer Tomo.