CAPITULO II.

TRIANGULACIONES GEODÉSICAS Y MODO DE CONSIDERAR LOS TRIÁNGULOS TRAZADOS EN LA SUPERFICIE DEL ELIPSOIDE.

24.—En el primer tomo de esta obra, al tratar de las operaciones topográficas en general, vimos que el fundamento en que descansan es que la superficie de una esfera y su plano tangente casi se confunden en una reducida extensión; y aun se recordará que el pequeño error que en realidad proviene de esta suposición, nos sirvió de base para fijar el límite de aquellas operaciones cuando se practican aisladamente. Pero se dijo al mismo tiempo que podrían hacerse extensivas á una porción cualquiera de la superficie del globo, sujetándolas á terminar de trecho en trecho en ciertos puntos muy bien determinados, lo cual equivale á suponer la superficie de la tierra compuesta de elementos planos muy pequeños, lo mismo que se consideran las líneas curvas formadas de partes elementales rectilíneas. Vamos ahora á ocuparnos en la manera de fijar, por medio de las triangulaciones geodésicas, la posición de aquellos puntos fundamentales que sirven de término y de rectificación á las operaciones topográficas.

Las triangulaciones geodésicas no tienen solamente el objeto que acabo de indicar, sino que se aplican también á la medida de grandes arcos del elipsoide, los cuales sirven para calcular en seguida sus ejes, y por consiguiente todo lo que se refiere á su figura y dimensiones. Los planos de vastas porciones de la tierra, como los conti-

nentes y los Estados, se forman principalmente por medio de grandes triangulaciones que determinan la posición de las ciudades y de las poblaciones más importantes, de las cadenas de montañas, de los ríos, de las costas, de las líneas limítrofes, etc., pues por lo común las escalas en que se construyen estas *cartas geográficas* son tan pequeñas, que no pueden aparecer en ellas caracteres topográficos más pormenorizados.

Aunque el espíritu de las triangulaciones geodésicas y su objeto final sean en rigor los mismos que los de las topográficas, fácilmente se comprende que deben existir entre ellas notables diferencias. Efectivamente, en la Topografía se proyectan ortogonalmente los puntos del terreno sobre el plano tangente á la superficie de la tierra; mientras que en la Geodesia la proyección se verifica por medio de líneas convergentes hacia el centro del globo, que son las verticales de los puntos. Las cadenas topográficas constan de triángulos rectilíneos que se resuelven por medio de la trigonometría plana; y las geodésicas, por el contrario, se componen de triángulos que podemos llamar *esferoídicos*, trazados en la superficie curva de un elipsoide, el cual, como se ha dicho, se supone formado por la prolongación ideal de los mares. Hay todavía otra diferencia esencial: la posición de un punto situado en una superficie plana se determina por medio de sus distancias á dos líneas fijas; mientras que estando situado sobre una superficie curva, hay necesidad de adoptar un sistema de coordenadas angulares ó esféricas, tales como la *longitud* y la *latitud* geográficas, referidas á dos planos coordenados que en este caso son el ecuador y un meridiano.

25.—Recordemos ahora brevemente las definiciones de longitud y latitud. En el Capítulo I se ha dicho ya que la latitud de un punto es su distancia angular al ecuador contada sobre el meridiano que pasa por el mismo punto. Se comprende desde luego que esta coordenada no basta por sí sola para fijar la posición de un lugar sobre el elipsoide, puesto que conviene á todos los que se hallen en el mismo paralelo.

Las latitudes se cuentan desde 0° hasta 90° partiendo del ecuador hacia ambos polos; y para distinguir las que se refieren á uno ú otro hemisferio, se les agregan los nombres de *Norte* ó *Sur*, según que los puntos á que pertenecen se hallen en el hemisferio boreal ó en el austral. Así decimos, por ejemplo, que la catedral de México está á los 19° 26′ 5″.3 de latitud Norte, y la ciudad de Santiago de Chile á 33° 26′ 42″.0 de latitud Sur. Con más frecuencia se designan las latitudes del hemisferio boreal con el signo +, y las del austral con el signo —, de modo que se dice que la latitud de México es de + 19° 26′ 5″.3 y la de Santiago — 33° 26′ 42″.0.

El ángulo formado por dos meridianos cualesquiera, se llama en general su *diferencia de longitud*, y se mide por el arco del ecuador ó de un paralelo interceptado por sus planos. La longitud y la latitud reunidas fijan perfectamente la situación de un lugar sobre la superficie de la tierra; porque la última determina la posición del punto sobre su meridiano, y la primera establece la del meridiano mismo respecto de otro que se toma por origen de las longitudes.

Como en el supuesto de ser la tierra un sólido de revolución, son iguales todos los meridianos, no hay razón alguna que haga adoptar uno de ellos de preferencia á cualquier otro para establecer el *cero* ú origen de las longitudes; así es que cada nación elige por lo común el que pasa por su capital ó por su principal Observatorio astronómico. Cuando decimos que México está á 99° 7′ 9″ de longitud al Oeste de Greenwich, se entiende que el meridiano de México forma ese ángulo con el que pasa por aquel Observatorio. El de Paris está á 2° 20′ 9″.4 al Este del de Greenwich, y por consiguiente, la longitud de México referida al meridiano de Paris como origen, es de 101° 27′ 18″.4 al Oeste.

Las longitudes se cuentan desde 0° hasta 180° tanto al Este como al Oeste, por lo que es preciso indicar la dirección del punto fijado respecto del meridiano que sirve de origen. También se acostumbra, y es preferible por la brevedad, á señalar las longitudes occidentales con el signo +, y con el signo — las orientales. Así diremos que la longitud de México respecto de Greenwich es + 99° 7′ 9″, y la de Paris, contada desde el mismo meridiano, es — 2° 20′ 9″.4. Esta anotación tiene también la ventaja de facilitar la combinación de las longitudes para cambiar de origen, ó para referir al mismo las que se

cuentan respecto de distintos meridianos, lo cual se consigue por una suma ó una resta atendiendo á las reglas de los signos. Por ejemplo, si determinamos la longitud de un punto respecto de México, y encontramos que es de — 1° 57′ 10″.2, su posición referida á Greenwich será $L_0 = L_1 + L_2$, ó bien:

$$L_0 = +\,99°\,7'\,9''.0 - 1°\,57'\,10''.2 = +\,97°\,9'\,58''.8$$

Si se quisiera referir la posición del meridiano de México al del Observatorio de Cambridge (Estados Unidos), cuya longitud contada desde Greenwich es + 71° 7′ 39″.9, se tendría $L_0 = L_1 - L_2$, ó lo que es lo mismo:

$$L_0 = +\,99°\,7'\,9''.0 - 71°\,7'\,39''.9 = +\,27°\,59'\,29''.1$$

Se comprenderá por estas definiciones que la cantidad que designé por L en la fórmula (33) del Capítulo I relativa á la superficie de un cuadrilátero terrestre, no es otra cosa más que la diferencia de longitud de los meridianos que lo terminan.

Las longitudes geográficas no siempre se expresan en medidas angulares como lo he hecho hasta aquí, sino en unidades de tiempo. Expliquemos brevemente la causa y la ventaja de este modo de contarlas: En virtud del movimiento de rotación del globo terrestre al derredor de su eje, cualquiera de sus puntos emplea 24 horas en describir un círculo paralelo al ecuador ó perpendicular al eje polar; y como este movimiento es uniforme, resulta que la velocidad angular será de 15° por hora. Por otra parte, la diferencia de meridianos ó de longitudes de dos lugares, es el ángulo que forman sus respectivos meridianos; y en consecuencia, puede expresarse por el tiempo que emplea la tierra en describirlo con la velocidad uniforme que acaba de indicarse. De esa manera la diferencia de longitudes representa directamente la diferencia de horas que se cuentan en los dos meridianos en un mismo instante físico; y bajo este aspecto facilita notablemente ciertos cálculos astronómicos, como se verá en otro lugar.

La reducción de unidades angulares á unidades de tiempo, y viceversa, se hace con la mayor facilidad, pues designando por a un arco cualquiera expresado en medidas angulares, y por t expresado en unidades de tiempo, se tiene la ecuación: $a = 15\,t$. Pero como el coeficiente 15 puede ponerse bajo la forma $\frac{60}{4}$, tendremos $a = \frac{60}{4}\,t$, lo cual indica que para convertir tiempo en arco debe multiplicarse el primero por 60 y tomar la cuarta parte del producto. La multiplicación por 60 equivale á convertir los segundos en minutos y éstos en grados, de modo que la operación queda reducida *á tomar la cuarta parte de la cantidad dada después de haber convertido los minutos en grados, los segundos en minutos y las fracciones de segundo de tiempo en segundos de arco.*

Si por el contrario, se da un arco para reducirlo á tiempo, *se multiplicará por cuatro después de haber convertido los grados en minutos, los minutos en segundos y los segundos en fracción decimal.*

Expresemos, por ejemplo, en tiempo la longitud 99° 7′ 9″.0 de México respecto de Greenwich. Convirtiendo los 99° en minutos de tiempo, etc., se tendrá:

$$\begin{array}{rr} & 1^h\,39^m\;\;7^s.15 \\ & 4 \\ \hline \text{Longitud en tiempo} = & 6^h\,36^m\,28^s.60 \end{array}$$

De igual manera hallaríamos que la longitud — 2° 20′ 9″.4 de Paris contada desde Greenwich, es — $9^m\,20^s.63$ expresada en tiempo. La de México respecto de Cambridge será + $1^h\,51^m 57^s.94$.

De lo que antes se ha expuesto inferimos que, por ejemplo, cuando se cuenta en México exactamente la hora del medio día, se contará en Cambridge la $1^h\,51^m\,57^s.94$, en Greenwieh las $6^h\,36^m 28^s.60$, en Paris las $6^h\,45^m\,49^s.23$, etc.

En los cálculos geodésicos casi siempre se expresan en arco las longitudes; pero como generalmente en los astronómicos se expresan en tiempo, he creído útil anticipar estas nociones, ya que ha sido preciso ocuparnos de las coordenadas que fijan geográficamente la posición de un lugar cualquiera del globo.

26.—Supongamos ahora proyectada una triangulación sobre la superficie del elipsoide por medio de las verticales de cada uno de sus vértices, y consideremos los triángulos que se originan de esta pro-

yección. Los lados de los triángulos serán lo que hemos llamado *líneas geodésicas* (número 18) que son las distancias más cortas entre cada dos puntos reducidas al nivel del mar.

Sean $P\,Q$ y $P\,R$ (fig. 4ª) los meridianos de dos puntos trigonométricos, cuyas proyecciones son Q y R; y $Q\,R$ el arco ó línea geodésica que los une. Si por la vertical $Q\,m$ del punto Q y por la segunda estación R se hace pasar un plano, este plano será vertical respecto del horizonte de Q; pero no lo será respecto del de R, como sucedería si la tierra fuese esférica. En efecto, para que el plano fuera vertical en R era preciso que contuviese la normal $R\,n$ de este punto; y por consiguiente, esta última prolongada debería encontrar á la de Q. La normal de Q está en el plano del meridiano $P\,Q$, la de R en el meridiano $P\,R$ y ambas cortan al eje de la tierra en distintos puntos m y n; luego estas líneas no se encuentran, y por tanto no pueden determinar un plano, con excepción únicamente del caso en que Q y R estuviesen sobre un mismo paralelo ó sobre un mismo meridiano.

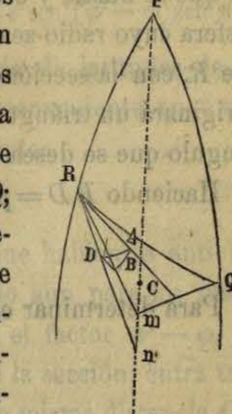

FIG. 4ª

Las verticales de los demás puntos de la línea geodésica encontrarán al eje entre m y n, formando en su conjunto una superficie curva, cuya intersección con la del elipsoide no podrá ser una curva plana como $Q\,R$, sino una línea de doble curvatura. De aquí podemos deducir que toda sección del elipsoide sujeta á la condición de contener las verticales de todos los puntos por donde pase, es en general una curva de doble curvatura. Debe exceptuarse, sin embargo, el caso en que la sección coincida con el meridiano, según se ha visto.

Una línea geodésica se supone originada por una superficie normal á la tierra en todos sus puntos; luego en rigor esta línea no puede considerarse como una curva plana. Investiguemos el error que resultaría de admitir que la sección $Q\,m\,R$ es normal á la superficie del elipsoide en todos sus puntos, ó lo que es lo mismo, de suponer que la línea geodésica es una curva plana. Para conseguirlo nada me parece más propio que calcular el pequeño ángulo que forma con esta sección la normal Rn del punto R. Haciendo pasar por Rn un plano ARD perpendicular á la sección QmR, el ángulo nRA será el que se busca; y considerando al punto R como el centro de una esfera cuyo radio sea la unidad, sus intersecciones con el meridiano de R, con la sección QmR y con el plano que le es perpendicular, originará un triángulo rectángulo en A, cuyo lado $AD = x$ mide el ángulo que se desea calcular.

Haciendo $BD = p$, se tiene:

$$\text{sen.}\, x = \text{sen.}\, p\, \text{sen.}\, ABD$$

Para determinar el arco p, el triángulo plano mRn da:

$$\text{sen.}\, p = \frac{mn}{Rm}\, \text{sen.}\, Rnm$$

Basta la consideración de que la tierra difiere poco de la forma esférica para comprender que los ángulos p y x deben ser muy pequeños, y que esta circunstancia nos permite hacer importantes simplificaciones en las ecuaciones anteriores sin alterar sensiblemente la exactitud del resultado. Desde luego se ve que siendo C el centro del globo, mn es igual á $Cn - Cm$, líneas cuya expresión se ha expuesto en el número 10. Además, como las mayores líneas geodésicas son muy pequeñas respecto de la magnitud del elipsoide terrestre, las normales de Q y R difieren poco entre sí, y mucho menos debe diferir la línea Rm de la normal del punto Q, la cual designaré por N. El ángulo Rnm es complemento de la latitud del punto R, y por tanto, sustituyendo en el valor de x, lo transformaremos en este otro:

$$\text{sen.}\, x = \frac{Cn - Cm}{N} \cos.\, \varphi'\, \text{sen.}\, u$$

en el que designo por φ' la latitud de R y por u el ángulo que forma la sección QmR con el meridiano de R. Llamando φ la latitud del punto Q, é introduciendo los valores de Cn y Cm, resulta:

$$\text{sen.}\, x = \left(\frac{a e^2 \text{sen.}\, \varphi'}{r'} - \frac{a e^2 \text{sen.}\, \varphi}{r} \right) \frac{\cos.\, \varphi'\, \text{sen.}\, u}{N}$$

Puesto que x debe ser muy pequeño, podemos suponer $r = r'$ y tomar φ por φ' en la primera parte de la ecuación, con lo cual, introduciendo el valor de N, se obtiene:

$$\text{sen.}\, x = e^2 (\text{sen.}\, \varphi' \cos.\, \varphi - \text{sen.}\, \varphi \cos.\, \varphi')\, \text{sen.}\, u = e^2 \text{sen.}\, (\varphi' - \varphi)\, \text{sen.}\, u$$

Como siempre es muy pequeña la diferencia de latitudes de los extremos de una línea geodésica, no hay inconveniente en tomar los arcos por sus senos, y así resultará finalmente:

$$x = e^2 (\varphi' - \varphi)\, \text{sen.}\, u$$

La forma de esta expresión comprueba lo que habíamos anticipado, á saber, que x es extremadamente pequeño aun para los mayores valores que pueda adquirir en la práctica el factor $\varphi' - \varphi$. El ángulo u, que puede tomarse por el azimut de la sección, entra también en el valor de x; pero nótese que para una misma distancia QR, al paso que crece $\varphi' - \varphi$ disminuye u, y por el contrario, cuando este ángulo aumenta, disminuye la diferencia de latitud. En efecto, el mayor valor de $\varphi' - \varphi$ corresponde al caso en que Q y R estén en el mismo meridiano, y entonces $u = 0$. El mayor valor de sen. u corresponde al caso en que la sección es perpendicular al meridiano, y entonces $\varphi' - \varphi$ es muy pequeño aun para un valor considerable de la distancia QR. Así, pues, para aplicar la fórmula adoptaré el caso en que ambos factores contribuyen á aumentar el valor de x, suponiendo $u = 45°$. En esta circunstancia, y atendiendo á las dimensiones de la tierra, se halla que siendo la distancia QR de 100000 metros, la diferencia de latitud de sus extremos es de 38′ próximamente, de lo que resultará:

e^2	7.82441	
2280″	3.35793	
sen. 45°	9.84948	
x	1.03182	$x = 10''.8$

Se ve por este resultado la pequeñez del ángulo formado por la normal y la sección, á pesar de haberse supuesto de 100 kilómetros la línea geodésica, lo que equivale á cerca de 24 leguas mexicanas. En los casos ordinarios de la práctica están lejos los lados trigonométricos de llegar á esas dimensiones, pues lo más común es que estén comprendidos entre 20000 y 50000 metros; y entonces los valores de u variarán desde $2''$ hasta $5''$, ó sea casi $1''$ por cada miriámetro, sin olvidar que esto se verifica en el caso desventajoso que corresponde á $u = 45°$.

Las consecuencias inmediatas de todo lo expuesto, son: que no resulta error alguno perceptible de suponer curvas planas las mayores líneas geodésicas; que las secciones de que provienen deben considerarse normales en todos sus puntos á la superficie del elipsoide; y por consiguiente, que los lados de una triangulación geodésica pueden tratarse como pequeños arcos de círculo máximo trazados sobre la superficie de una esfera. De aquí se deduce también que los ángulos de un triángulo geodésico, que no son otra cosa más que los de los planos verticales que por su intersección con la superficie del elipsoide terrestre determinan los lados trigonométricos, no difieren sensiblemente de los de un triángulo esférico.

27.—Hemos llegado en último resultado á la conclusión de que un triángulo geodésico puede considerarse como trazado sobre una esfera, conclusión á la que podría también habernos conducido la simple consideración de que siendo los mayores triángulos de una cadena extremadamente pequeños respecto de las dimensiones del globo, no debería resultar error de importancia al suponer la superficie terrestre compuesta de cascos esféricos, ó lo que es lo mismo, de admitir que cada elemento de la superficie esferoidal se confunde con el correspondiente al de la esfera osculatriz.

Aceptadas estas consecuencias, queda todavía una dificultad, cual es la de asignar el radio de la esfera que coincida sensiblemente con el elipsoide en una pequeña extensión, tal como la superficie de un triángulo geodésico.

Hemos visto que todas las secciones verticales que pueden imaginarse al derredor de un punto tienen radios de curvatura que dependen del azimut de cada sección; pero que están comprendidos entre los límites ρ y N. La primera idea que se presenta naturalmente á la imaginación es la de investigar si alguno de estos límites puede tomarse por radio de la esfera osculatriz, pues se recordará que el pri-

mero mide la curvatura del meridiano y el segundo la del primer vertical, y que por tanto, los círculos descritos con esos radios se confunden sensiblemente en un espacio de uno ó dos grados con la curva á que pertenecen. La forma de sus expresiones indica á primera vista que para una misma variación de latitud, ρ debe variar más que N; pero para hacerlo más perceptible, si se diferencian los valores de N y ρ con relación á la latitud, se tendrá:

$$\mathrm{d}N = \frac{\frac{1}{2}\, a\, e^2 \operatorname{sen.} 2\varphi}{r^3}\, \mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\frac{3}{2}\, a e^2 (1-e^2) \operatorname{sen.} 2\varphi}{r^5}\, \mathrm{d}\varphi$$

y si se suprimen los denominadores, que siempre difieren poco de la unidad, y se desecha la cuarta potencia de e, se halla:

$$\mathrm{d}N = \frac{1}{2}\, a\, e^2 \operatorname{sen.} 2\varphi\, \mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}\rho = \frac{3}{2}\, a e^2 \operatorname{sen.} 2\varphi\, \mathrm{d}\varphi$$

de donde se deduce que $\mathrm{d}\rho = 3\,\mathrm{d}N$. Por consiguiente la esfera descrita con N, que se confundiría en un largo espacio con una zona elemental del elipsoide en la dirección de Oriente á Poniente, daría de Norte á Sur una curvatura algo menos pronunciada que la que corresponde al meridiano; y por el contrario, la esfera descrita con ρ por radio, daría una curvatura demasiado fuerte al primer vertical.

En vista de esto, lo que parece más razonable es buscar cuál es la sección cuya curvatura sea un término medio entre las del meridiano y del primer vertical. Sea M la primera y V la segunda: designando por S la de la sección que se busca, estableceremos la condición:

$$S = \frac{1}{2}(M + V)$$

de la que resulta esta otra:

$$M - S = S - V$$

Teniendo presente que las curvaturas de dos líneas son inversamente proporcionales á los radios que las miden, hallaremos:

$$M\rho = SR_u$$
$$VN = SR_u$$

La ecuación (26) del Capítulo I expresa el valor de R_u en función de N; para obtenerlo en función de ρ tendremos:

$$N = \rho(1 - e^2 \text{sen.}^2 \varphi)(1 - e^2)^{-1} = \rho(1 + e^2 \cos.^2 \varphi)$$

valor que sustituído en la fórmula (26) produce:

$$R_u = \rho(1 + e^2 \cos.^2 \varphi)(1 - e^2 \cos.^2 \varphi \cos.^2 u) = \rho(1 + e^2 \cos.^2 \varphi \,\text{sen.}^2 u)$$

Introduciendo esta expresión en la primera de las relaciones anteriores, y la (26) en la segunda, resultará:

$$\frac{M}{S} = 1 + e^2 \cos.^2 \varphi \text{ sen.}^2 u$$

$$\frac{V}{S} = 1 - e^2 \cos.^2 \varphi \cos.^2 u$$

de las que se obtiene:

$$M - S = Se^2 \cos.^2 \varphi \,\text{sen.}^2 u$$
$$S - V = Se^2 \cos.^2 \varphi \cos.^2 u$$

Igualando estos valores para cumplir la condición establecida, hallaremos:

$$\text{sen.}^2 u = \cos.^2 u \qquad \text{ó bien: } \tan.^2 u = 1$$

ecuaciones que quedan satisfechas para $u = 45°$. También las satisfacen los azimutes de $90° + 45°$, de $180° + 45°$ y de $360° - 45°$; pero como de estos últimos el primero y el tercero corresponden á la misma sección, así como el segundo á la sección de 45° de azimut, y todas ellas están igualmente inclinadas respecto del plano del meridiano contando los azimutes por cuadrantes, deduciremos que *la sección cuya curvatura es media entre las del meridiano y del primer vertical, es la que tiene 45° de azimut.* (1)

Representando por R' el radio de curvatura de esta que podría llamarse *sección media*, tendremos las siguientes expresiones que crecen lentamente con la latitud:

$$R' = N\left(1 - \frac{1}{2} e^2 \cos.^2 \varphi\right)$$

$$R' = \rho\left(1 + \frac{1}{2} e^2 \cos.^2 \varphi\right)$$

y que por lo demostrado, producirán una esfera que consideraremos como osculatriz, puesto que es la que mejor conviene al conjunto de curvaturas que presenta el elipsoide al derredor de un punto cuya

(1) Si suponiendo $u = 45°$, se multiplican uno por otro los valores de $\frac{M}{S}$ y $\frac{V}{S}$ desechando la cuarta potencia de e, resulta:

$$S = \sqrt{MV}$$

lo cual indica que la curvatura de la sección, cuyo azimut es de 45°, puede tomarse igual al medio geométrico entre las correspondientes al meridiano y al primer vertical. A primera vista parece que este resultado no puede conciliarse con el que antes se ha obtenido; pero es fácil demostrar que los términos medios aritmético y geométrico entre dos cantidades, se confunden sensiblemente siempre que la diferencia de las cantidades es pequeña respecto de sus magnitudes.

Sean, en efecto, a y $a + x$ las dos magnitudes. Su medio aritmético será:

$$A = a + \frac{1}{2} x$$

y su medio geométrico:

$$G = (a^2 + ax)^{\frac{1}{2}} = a\left(1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} + \frac{x^3}{16a^3} - \ldots\ldots\right)$$

ó bien:

$$G = A - \frac{x^2}{8a} + \frac{x^3}{16a^2} - \ldots\ldots$$

Se ve por esta relación que los valores de A y G se aproximan tanto más á la igualdad, cuanto más pequeño sea x respecto de a, y llegarían á ser rigurosamente iguales si $x = 0$. Según esto, en casos análogos, puede adoptarse en la práctica indiferentemente el medio aritmético ó el geométrico según la naturaleza de los cálculos, siendo el geométrico más cómodo para el uso de los logaritmos. Por esta razón se adoptó en el teorema demostrado en el número 11, referente al radio medio de la tierra.

latitud sea φ. Con ayuda de las Tablas que contienen los logaritmos de N y de ρ, se hallará fácilmente el de R', por las fórmulas:

$$\log. R' = \log. N - (7.16116) \cos.^2 \varphi$$
$$\log. R' = \log. \rho + (7.16116) \cos.^2 \varphi$$

28.—Casi todos los autores de Geodesia consideran suficientemente exacto el tomar la normal mayor por radio de la esfera osculatriz. Sin negar que este procedimiento basta en la mayor parte de los casos, creo que el método expuesto es menos arbitrario, y de resultados más estrictos en aquellos casos excepcionales en que los triángulos adquieran dimensiones considerables. Por otra parte, cuando la resolución de un problema recae sobre una línea cuyo radio de curvatura difiera notablemente del de la esfera osculatriz que se haya supuesto, y se tema que esta diferencia dé lugar á algún error de importancia, puede corregirse el primer resultado de la manera que voy á indicar.

Sea s la extensión lineal de una línea geodésica, que se ha hallado que abraza una amplitud de g' grados en una esfera de radio R'. La relación entre estas cantidades existe en la ecuación:

$$s = \frac{\pi}{180^\circ} R' g'$$

Pero si se reconoce que el arco cuya extensión es s forma parte de una sección cuyo radio de curvatura es λ, la amplitud g que realmente le corresponde se tendrá por la fórmula:

$$s = \frac{\pi}{180^\circ} \lambda g$$

De donde igualando los dos valores de s resulta:

$$g = g' \frac{R'}{\lambda}$$

de suerte que basta multiplicar la amplitud hallada en la esfera supuesta, por la relación que existe entre su radio y el de curvatura

de la sección á que pertenece la línea, para hallar su verdadera amplitud.

Si por el contrario, la amplitud es constante y se desea conocer el valor lineal s, sabiendo que es s' en la esfera osculatriz, se tendrá:

$$s = s' \frac{\lambda}{R'}$$

que permite, como antes, corregir el primer resultado cuando se juzgue necesario.

Creo poder anticipar que sólo en casos especiales será preciso hacer esta corrección, como cuando se trata de arcos pertenecientes al meridiano ó al primer vertical, cuyas curvaturas forman los extremos mayor y menor entre los cuales están comprendidas las de las demás secciones. En la mayoría de los casos basta emplear el radio de la esfera osculatriz, y aun en muchos, usar un valor constante del radio terrestre, tal como el que convenga á la latitud media del país en que se trabaja.

29.—Reducido así el problema de las triangulaciones geodésicas á las aplicaciones comunes de la trigonometría esférica, enumeremos brevemente las diversas operaciones que constituyen una triangulación. Lo mismo que se hizo en la Topografía, las clasificaremos en el orden siguiente:

I.—La medida de una ó más bases, cuya longitud sea proporcionada á los lados de los primeros triángulos, y que según las circunstancias, varía desde 5000 hasta 15000 ó más metros.

II.—La elección de los vértices trigonométricos, considerándolos desde el doble punto de vista de ser notables por su posición y de prestarse á que los triángulos de la cadena tengan una forma conveniente.

III.—La medida de los ángulos y la orientación de uno ó más lados.

IV.—La resolución de los triángulos y los cálculos relativos á las coordenadas geográficas de sus vértices.

V.—La formación de la *carta*, ó sea de la *proyección*, que es una construcción geométrica convencional para representar sobre la superficie plana del papel otra superficie no desarrollable, como es la del elipsoide terrestre.

A las diferencias establecidas en este Capítulo entre las triangulaciones topográficas y las geodésicas, es preciso agregar otras de la mayor importancia. En primer lugar, la orientación de una cadena geodésica debe hacerse por procedimientos astronómicos, únicos que pueden suministrar toda la exactitud que se necesita. En segundo lugar, el cálculo de las coordenadas geográficas de los vértices demanda la determinación directa de las de uno de ellos por lo menos, también por métodos astronómicos de la mayor precisión. Por esta razón he consagrado la Parte Tercera de este libro á la exposición de los métodos más usuales que sirven para medir directamente el azimut de una línea, y para determinar la latitud y la longitud geográficas de un punto. Estas operaciones constituyen la aplicación indispensable de la Astronomía práctica á la Geodesia.

CAPITULO III.

MEDIDA DE LAS BASES.

30.—La medida de las bases geodésicas es la operación más importante y quizá la más difícil de una triangulación. Nada hay que añadir á lo que se dijo en la Topografía respecto de la elección del terreno, si no es que siendo las bases geodésicas más grandes que las topográficas, necesitan mayor esmero en la elección de las localidades y en el trazo ó demarcación de las líneas. Por lo común se hace éste con un buen teodolito perfectamente nivelado, estableciendo jalones á intervalos de 50^m, exactamente en la dirección que marca el hilo de la retícula, el cual se ha hecho coincidir primero con la señal que indica el término de la línea.

Los instrumentos que se usan para la medida consisten en reglas de madera ó de metal, cuya longitud varía generalmente de 3^m á 5^m, montadas en caballetes ó tripiés con todos los mecanismos necesarios para comunicarles pequeños movimientos en el sentido vertical y en el horizontal, á fin de colocarlas á nivel y exactamente en el plano vertical que pasa por los extremos de la base. La longitud total de las reglas se llama *estación.*

Antes de describir algunos de estos aparatos, indiquemos el método que se sigue para determinar con toda precisión el tamaño de las reglas. Se sabe que todos los cuerpos experimentan variaciones en sus dimensiones, debidas á los cambios de temperatura á que están sujetos, y esta propiedad general de la materia es la que se llama