expresada en las mismas unidades que ρ. Calculemos, por ejemplo, el tamaño de un grado del meridiano á la latitud 19° 26′ 12″.3 de la Escuela de Ingenieros de México.

ρ....................	6.8022169
3600″..............	3.5563025
sen. 1″..............	4.6855749
d s....................	5.0440943...............d s = 110686^m.4

Si esta cantidad se divide por 60, se tendrá 1844^m.77 por extensión de 1′, esto es, por la distancia entre dos puntos del meridiano de México cuyas verticales formen un ángulo de 1′. De una manera semejante se encontraría que 1″ vale 30^m.746.

Basta la consideración de que es elíptico el meridiano terrestre para comprender que los arcos de igual amplitud deben tener extensiones variables á diversas latitudes. Para obtener la ley de esta variación sustituyamos en la ecuación (19) el valor de r, y elevemos su denominador al numerador, de lo que resulta desarrollando.

$$ds = a(1-e^2)\left(1+\frac{3}{2}e^2\text{sen.}^2\varphi+\frac{15}{8}e^4\text{sen.}^4\varphi+\frac{35}{16}e^6\text{sen.}^6\varphi+\ldots\ldots\right)d\varphi$$

Para $\varphi = O$ se tiene en el ecuador $ds_0 = a(1-e^2)\,d\varphi$. Sustituyendo en la anterior y no apreciando más que hasta la segunda potencia de e, resultará:

$$ds - ds_0 = \frac{3}{2}\,ds_0\,e^2\,\text{sen.}^2\varphi$$

Para una amplitud dada d φ, la extensión d s_0 es constante, y por tanto, lo será el coeficiente de sen.$^2\varphi$. Representándolo por C tendremos:

$$ds - ds_0 = C\,\text{sen.}^2\varphi$$

resultado que indica que *el incremento de los arcos de igual amplitud en el meridiano, es proporcional al cuadrado del seno de la latitud á que se consideran.*

13.—La fórmula (19) permite calcular con bastante exactitud la extensión de los arcos del meridiano cuando son pequeños, esto es, cuando no exceden de dos ó tres grados; pero pasando de esa amplitud ya no sería exacto calcularlos por medio de una expresión diferencial, sino que será preciso hacer antes la integración de ésta. Para conseguirlo, desarrollémosla en serie para obtener:

$$s = a(1-e^2)\int\left(1+\frac{3}{2}e^2\text{sen.}^2\varphi+\frac{15}{8}e^4\text{sen.}^4\varphi+\frac{35}{16}e^6\text{sen.}^6\varphi+\ldots\ldots\right)d\varphi$$

Se tiene, por otra parte:

$$\text{sen.}^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos.2\varphi)$$

$$\text{sen.}^4\varphi = \frac{1}{8}(3-4\cos.2\varphi+\cos.4\varphi)$$

$$\text{sen.}^6\varphi = \frac{1}{32}(10-15\cos.2\varphi+6\cos.4\varphi-\cos.6\varphi)$$

Sustituyendo estos valores, y haciendo para abreviar:

$$A = 1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\ldots\ldots\quad \text{Log. } A = 0.00218214$$

$$B = \frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\ldots\ldots\quad ,,\ B = 7.7031107$$

$$C = \frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\ldots\ldots\quad ,,\ C = 5.023664$$

$$D = \frac{35}{512}e^6+\ldots\ldots\quad ,,\ D = 2.30802$$

la serie anterior se representará así:

$$s = a(1-e^2)\int(A - B\cos.2\varphi + C\cos.4\varphi - D\cos.6\varphi)\,d\varphi$$

y efectuando la integración, resulta:

$$s = a(1-e^2)\left(A\varphi - \frac{1}{2}B\,\text{sen.}2\varphi + \frac{1}{4}C\,\text{sen.}4\varphi - \frac{1}{6}D\,\text{sen.}6\varphi\right)\ldots\ldots(20)$$

En esta fórmula el primer término del tercer factor contiene el arco φ contado desde el ecuador, y expresado en partes del radio trigonométrico; pero puede expresarse en segundos multiplicándolo por sen. $1''$.

Para hallar la distancia entre dos puntos situados en el mismo meridiano, puede calcularse la de cada uno al ecuador por la ecuación precedente, y su diferencia será la distancia que se busca; pero es más breve determinarla directamente de este modo. Si es φ' la latitud del otro punto, se obtendrá por la fórmula la distancia s', que restada de s, produce:

$$s-s'=a(1-e^2)\begin{pmatrix} A(\varphi-\varphi')-B\,\text{sen.}(\varphi-\varphi')\cos.(\varphi+\varphi') \\ +\frac{1}{2}C\text{sen.}2(\varphi-\varphi')\cos.2(\varphi+\varphi')-\frac{1}{3}D\text{sen.}3(\varphi-\varphi')\cos.3(\varphi+\varphi') \end{pmatrix}$$

ó bien designando por g la diferencia de latitudes, esto es: $g=\varphi-\varphi'$, se obtiene:

$$s-s'=a(1-e^2)\begin{pmatrix} Ag-B\,\text{sen.}\,g\cos.(2\varphi-g) \\ +\frac{1}{2}C\text{sen.}\,2g\cos.2(2\varphi-g)-\frac{1}{3}D\text{sen.}\,3g\cos.3(3\varphi-g) \end{pmatrix}.(21)$$

Calculemos, por ejemplo, el arco de meridiano comprendido entre los paralelos de 15° y 33° de latitud. Se tendrá: $\varphi-\varphi'=18°$ y $\varphi+\varphi'=48°$.

a.......	6.8046435						
$1-e^2$..	9.9970917						
				0.5......	9.69897	0.3..........	9.4771
	6.8017352	....	6.8017352	....	6.80174	....	6.8017
A....	0.0021821	B....	7.7031107	C....	5.02366	D....	2.3080
64800″	4.8115750	sen.18°	9.4899824	sen. 36°.	9.76922	sen. 54°.....	9.9080
sen. 1″	4.6855749	cos.48°	9.8255109	cos. 96°.	9.01923—	cos. 144°...	9.9080
	6.3010672		3.8203392		0.31282—		8.4028

Primer término.........	2000171.^{m}4
Segundo „	—6612. 1
Tercero „	— 2. 1
Cuarto „	0. 0
$s-s'=$	1993557.^{m}2

Cuando $\varphi=90°$, la fórmula (20) suministra el cuadrante del meridiano, siendo igual á $\frac{1}{2}\pi$ el arco φ en partes del radio, y se tiene:

$$\text{Cuadrante}=s=\frac{1}{2}a(1-e^2)\pi A \;\;..........\;(22)$$

ó bien introduciendo el valor de A y desarrollando, resulta la serie:

$$\text{Cuadrante}=s=\frac{1}{2}a\pi\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4-\frac{5}{256}e^6-....\right)...(23)$$

Hagamos la aplicación de estas fórmulas:

$\frac{1}{2}$...............	9.6989700	
a...............	6.8046435	
π...............	0.4971499	
$1-e^2$..........	9.9970917	
A..........	0,0021821	
s...............	7.0000372......	Cuadrante = 10000857.^{m}1 [1]

El mismo resultado se obtiene por el cálculo de la serie (23), según se ve á continuación:

	$\frac{1}{4}$......	9.3979400	$\frac{3}{64}$....	8.67094	$\frac{5}{256}$.........	8.2907
	e^2.....	7.8244057	e^4......	5.64881	e^6...........	3.4732
$\frac{1}{2}a\pi$ 7.0007634	....	7.0007634	....	7.00076	....	7.0008
		4.2231091		1.32051		8.7647

Primer término........................	10017593.^{m}3
Segundo „	—16715. 1
Tercer „	— 20. 9
Cuarto „	— 0. 1
Cuadrante =	10000857.^{m}1

1 Cuando en 1799 se adoptó en Francia el sistema decimal de medidas, se tomó por base el resultado de las operaciones ejecutadas para medir el arco del meridiano que pasa por Paris, estableciéndose en la ley que el *metro* representaba la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre; pero posteriormente se halló un error en los cálculos de Delambre, cuyo efecto fué el de haberse asignado al *metro legal* una extensión un poco menor de la que realmente le correspondía sin la existencia de ese error. Como se ve, el conjunto de las medidas modernas da 857^m de más en la extensión del cuadrante, de modo que el metro *real ó físico* es casi 0^m.0001 mayor que el legal.

14.—**Arcos de paralelo.**—Según la generación del elipsoide, cualquier punto M de la elipse generatriz describe un círculo que se llama *paralelo* al ecuador, por la posición que tiene realmente respecto de ese plano, siendo $MO = x$ su radio. Por consiguiente, un arco de g grados tendrá una extensión p, que puede calcularse por la fórmula:

$$p = \frac{\pi}{180^\circ} g N \cos \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

La cantidad $\frac{\pi}{180^\circ}$ expresa el arco 1° en partes del radio, cuyo logaritmo constante, introducido en la ecuación anterior, la reduce á la siguiente:

$$p = (8.2418774)\, g N \cos. \varphi$$

Determinemos la extensión en metros de un grado en el paralelo de México. En este caso se tiene $g = 1^\circ$, y $\varphi = 19^\circ\, 26'\, 12''.3$.

Const.................	8.2418774	
N.......................	6.8048041	
$\cos \varphi$.................	9.9745160	
p........................	5.0211975	$p = 105002.^{\text{m}}0$

El arco de un minuto tendrá, pues, la extensión de $1750.^{\text{m}}03$, y el de un segundo la de $29.^{\text{m}}167$. Si $\varphi = 0^\circ$ y $g = 1^\circ$, resulta un grado del ecuador de $111306.^{\text{m}}6$, que equivale á 26.564821 leguas mexicanas.

15.—**Intersecciones del elipsoide con planos verticales.**—Todos los planos que contienen la línea vertical de un punto M (fig 2ª), se llaman planos verticales, y están caracterizados por la propiedad de ser perpendiculares al plano tangente en M, que se llama el *horizonte* de este punto. Entre todos los planos verticales hay uno cuyo azimut es de 90°, ó bien que forma un ángulo recto con el meridiano, y señala la posición de los puntos *Este* y *Oeste.*

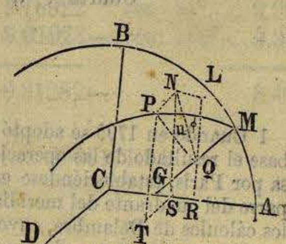

FIG 2ª

Este plano es el que se designa con el nombre de *primer vertical*, según se ha dicho en la Topografía.

La intersección de cualquier plano vertical con la superficie de la tierra produce una elipse cuya ecuación vamos á determinar con el objeto de hallar su radio de curvatura en el punto M, por ser de uso frecuente en la Geodesia. Sea MP una parte de la sección originada por el plano vertical PMG, que forma con el meridiano un ángulo azimutal $BMP = u$. Tomando por planos coordenados el ecuador ACD, el meridiano ACB y otro meridiano BCD perpendicular á éste, adoptemos por eje de las x la línea CA, por eje de las y la CD, y finalmente la CB por eje de las z. Según esto, las coordenadas de un punto cualquiera P de la intersección serán: $x' = CS$, $y' = ST$ y $z' = TP$; y como P está situado en la superficie del elipsoide, sus coordenadas satisfarán la ecuación de éste, que es:

$$a^2 z'^2 + b^2(x'^2 + y'^2) = a^2 b^2$$

y que introduciendo el valor de b^2, puede ponerse bajo esta forma:

$$z'^2 + (1 - e^2)(x'^2 + y'^2) = a^2(1 - e^2)$$

Tomemos ahora en el plano de la curva la vertical GM por eje de ordenadas siendo G el origen, y designemos por x é y las coordenadas del mismo punto P referidas á este eje; á saber $y = GQ$, $x = QP$. Hallando los valores de x', y' y z' en función de x é y, y sustituyéndolos en la ecuación del elipsoide, determinaremos la de la curva. Para esto tracemos la línea PN perpendicular al meridiano, así como en este plano las líneas NL y LR, la primera paralela y la segunda perpendicular á CA. El plano PQN resultará perpendicular á GM, formando las líneas PQ y QN el ángulo PQN igual al azimut u de la sección. Igualmente la línea NQ, perpendicular á GM, formará con LR, perpendicular á CA, el ángulo

$$NQL = MGA = \varphi$$

De aquí se deducen los valores siguientes:

$$x' = CG + GR - NL \qquad y' = PN \qquad z' = RQ + QL$$

Y como además se tiene:

$$CG = \frac{a e^2 \cos. \varphi}{r}; \qquad NP = x \operatorname{sen.} u;$$

$$GR = y \cos. \varphi; \qquad QR = y \operatorname{sen.} \varphi;$$

$$NL = NQ \operatorname{sen.} \varphi = x \cos. u \operatorname{sen.} \varphi \qquad QL = NQ \cos. \varphi = x \cos. u \cos. \varphi$$

resultará sustituyendo:

$$x' = \frac{a e^2 \cos. \varphi}{r} + y \cos. \varphi - x \cos. u \operatorname{sen.} \varphi$$

$$y' = x \operatorname{sen.} u$$

$$z' = y \operatorname{sen.} \varphi + x \cos. u \cos. \varphi$$

Introducidos estos valores en la ecuación del elipsoide, y haciendo para abreviar:

$$A = 1 - e^2 (1 - \cos.^2 u \cos.^2 \varphi) \qquad D = -\frac{a e^2 (1 - e^2) \cos. u \operatorname{sen.} 2\varphi}{r}$$

$$B = 1 - e^2 \cos.^2 \varphi \qquad E = \frac{2 a e^2 (1 - e^2) \cos.^2 \varphi}{r}$$

$$C = e^2 \cos. u \operatorname{sen.} 2\varphi \qquad F = \frac{a^2}{r^2} (1 - e^2)^2 (1 + e^2 \cos.^2 \varphi)$$

se obtendrá fácilmente la siguiente ecuación de la curva:

$$A x^2 + B y^2 + C x y + D x + E y = F$$

que es la de la elipse que resulta de la intersección de la tierra con el plano.

16.—Designando ahora por R_u el radio de curvatura para un punto de esta sección, se tiene:

$$R_u = -\frac{\left(1 + \frac{d y^2}{d x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^2}}$$

y diferenciando dos veces la ecuación anterior en el supuesto de ser dx constante, se obtendrá sucesivamente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Ax + Cy + D}{2By + Cx + E}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{2A + 2B \frac{d y^2}{d x^2} + 2C \frac{dy}{dx}}{2By + Cx + E}$$

Sustituídos estos valores en la expresión de R_u, darán el radio de curvatura del punto cualquiera de la curva cuyas coordenadas sean x é y; pero como el que importa conocer es el correspondiente á M cuyas coordenadas son $x = 0$, $y = \frac{a(1-e^2)}{r}$, tendremos introduciendo estos valores y los de los coeficientes $A\ B\ C$, etc.:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{r[1 - e^2 (1 - \cos.^2 u \cos.^2 \varphi)]}{a (1 - e^2)}$$

En consecuencia, el radio de curvatura en el punto M, es:

$$R_u = \frac{a (1 - e^2)}{r (1 - e^2 + e^2 \cos.^2 u \cos.^2 \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Cuando u es igual á 0° ó á 180°, esto es, cuando el plano secante se confunde con el meridiano, resulta:

$$R_0 = \frac{a (1 - e^2)}{r (1 - e^2 \operatorname{sen.}^2 \varphi)} = \frac{a (1 - e^2)}{r^3}$$

que es en efecto el valor de ρ hallado para el radio de curvatura del meridiano. Si $u = 90°$, ó bien $u = 270°$, se obtiene:

$$R_{90} = \frac{a (1 - e^2)}{r (1 - e^2)} = \frac{a}{r} = N$$

luego *el radio de curvatura de una sección perpendicular al meridiano es igual á la normal mayor del punto de intersección de los dos planos.*

Para facilitar el cálculo logarítmico de la expresión (25) elevemos el denominador al numerador desarrollando hasta la segunda potencia de e; y teniendo presente que $\frac{a}{r} = N$, resultará:

$$R_u = N(1 - e^2 \cos.^2 \varphi \cos.^2 u) \text{ .... } (26)$$

de donde se obtiene la fórmula logarítmica:

$$\log. R_u = \log. N - M e^2 \cos.^2 \varphi \cos.^2 u$$

Esta ecuación suministra directamente el log. del radio de curvatura de la sección cuyo azimut es u, conociendo el de la normal mayor que corresponde á la misma latitud. Calculando el logaritmo de la cantidad constante Me^2, se tiene:

$$\log. R_u = \log. N - (7.46219) \cos^2 \varphi \cos.^2 u \text{ .... } (27)$$

Determinemos, por ejemplo, el radio del círculo osculador de la sección que forma un ángulo de 45° con el meridiano de México.

Const........ 7.46219			
$\cos.^2 \varphi$ 9.94903			
$\cos.^2 u$......... 9.69897	$\log. N =$ 6.8048041		
7.11019.................	$-$ 0.0012888		
	$\log. R_{45} =$ 6.8035153	$R_{45} = 6360852^m$	

Como una de las Tablas que van al fin de este Capítulo proporciona los logaritmos de las normales para todas las latitudes de la Republica, se calculará con la mayor facilidad el radio de curvatura de cualquiera sección que tenga u por azimut.

17.—Si en los coeficientes A, B, C, etc., de la ecuación general de las secciones verticales del elipsoide se hace $u = 90°$, se nulificarán los valores de C y D, resultando $Ax^2 + By^2 + Ey = F$ por ecuación de la sección originada por el primer vertical, referida al extremo de la normal menor como origen. Busquemos los semiejes a' y b' de esta elipse. Desde luego, haciendo $x = 0$, se obtiene para los puntos M y K (fig. 1ª):

$$By^2 + Ey = F$$

cuya resolución da los dos valores siguientes, que corresponden á aquellos puntos:

$$y_1 = -\frac{E}{2B} + \frac{E}{2B}\sqrt{1 + \frac{4BF}{E^2}} \qquad y_2 = -\frac{E}{2B} - \frac{E}{2B}\sqrt{1 + \frac{4BF}{E^2}}$$

La semidiferencia de éstos suministrará el semieje menor MK, á saber:

$$b' = \frac{E}{2B}\sqrt{1 + \frac{4BF}{E^2}} = \frac{a e^2 (1 - e^2) \cos.^2 \varphi}{r(1 - e^2 \cos.^2 \varphi)} \sqrt{1 + \frac{1 - e^4 \cos.^4 \varphi}{e^4 \cos.^4 \varphi}}$$

$$b' = \frac{a}{r}\left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos.^2 \varphi}\right)$$

Para calcular el semieje mayor a' es necesario determinar las coordenadas de un punto por lo menos. Conservando el mismo eje de ordenadas MK, la ecuación de la curva referida á su centro S será:

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2$$

Calculemos las coordenadas del punto de la elipse que está situado en el ecuador, y cuya proyección es G. Se tiene:

$$SG = y = \tfrac{1}{2} MK - n = \frac{a(1 - e^2)}{r(1 - e^2 \cos.^2 \varphi)} - \frac{a(1 - e^2)}{r} = \frac{a(1 - e^2) e^2 \cos.^2 \varphi}{r(1 - e^2 \cos.^2 \varphi}$$

La abscisa, que está situada en el plano del ecuador, será media proporcional entre las dos partes del diámetro $2a$, y así:

$$x^2 = \left(a + \frac{a e^2 \cos. \varphi}{r}\right)\left(a - \frac{a e^2 \cos. \varphi}{r}\right) = \frac{a^2}{r^2}(r^2 - e^4 \cos.^2 \varphi)$$

Conociendo los valores de x é y, la ecuación de la curva da:

$$a'^2 = \frac{x^2}{1 - \frac{y^2}{b'^2}}$$

Con los valores hallados se tiene $\frac{y}{b'} = e^2 \cos.^2 \varphi$, por lo cual se encuentra:

$$a'^2 = \frac{a^2(r^2 - e^4 \cos.^2 \varphi)}{r^2(1 - e^4 \cos.^4 \varphi)} = \frac{a^2}{r^2} \frac{1 - e^2 + e^2 \cos.^2 \varphi - e^4 \cos.^2 \varphi}{(1 - e^2 \cos.^2 \varphi)(1 + e^2 \cos.^2 \varphi)}$$

$$= \frac{a^2}{r^2} \frac{(1 - e^2)(1 + e^2 \cos.^2 \varphi)}{(1 - e^2 \cos.^2 \varphi)(1 + e^2 \cos.^2 \varphi)}$$

y finalmente:

$$a' = \frac{a}{r} \left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos.^2 \varphi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

La excentricidad de esta sección puede calcularse por la fórmula:

$$e'^2 = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = 1 - \frac{b'^2}{a'^2} = 1 - \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos.^2 \varphi} = \frac{e^2 \operatorname{sen.}^2 \varphi}{1 - e^2 \cos.^2 \varphi}$$

por la cual se ve que la excentricidad es nula cuando $\varphi = 0$, y es igual á e cuando $\varphi = 90°$, creciendo en general con la latitud. En efecto, si suponemos el punto M en A, su primer vertical se confunde con el ecuador, que es un círculo; y si se supone en B, su primer vertical será un meridiano perpendicular al de la figura. A la latitud de México el cuadrado de la excentricidad del primer vertical es sólo $e'^2 = 0{,}0007435$, ó próximamente la décima parte del valor que obtuvimos para el meridiano; de lo cual se deduce que aquella sección difiere muy poco de un círculo.

Un arco de g grados de amplitud y perpendicular al meridiano abrazará una extensión dada por la fórmula:

$$q = \frac{\pi}{180°} g N = (8.2418774)\, g N \quad \text{............} \quad (28)$$

y puesto que N es mayor que ρ, concluiremos que en el sentido de Oriente á Poniente la curvatura de la tierra es algo menos pronunciada que de Norte á Sur. De la fórmula precedente resulta que á la latitud de México un grado del primer vertical tiene 111347.ᵐ6, y 30.ᵐ930 el arco de 1″, extensión que es 0.ᵐ184 mayor que 1″ del meridiano.

18.—Reducción de las líneas geodésicas á segundos.—Se llama *línea geodésica* la distancia más corta que hay entre dos puntos del globo, contada sobre la superficie de éste. Generalmente hablando, esta línea es de doble curvatura, puesto que las normales de sus diversos puntos no están en un mismo plano; pero como las mayores líneas geodésicas que se consideran en la práctica común de la ciencia, son muy pequeñas respecto del radio del elipsoide, ningún error apreciable se origina de suponerlas curvas planas; y así es que las consideraremos como rigurosamente tales.

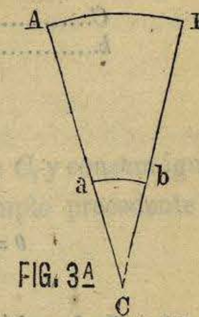

FIG. 3ª

Sea $AB = k$ (fig. 3ª) la línea geodésica que une los puntos A y B, y que por su pequeñez relativa se confunde sensiblemente con el arco trazado con el radio $CA = R_u$ de su círculo osculador. Si con un radio Ca tomado por unidad, se describe el arco $ab = \theta$, este arco medirá la amplitud de k, y la figura da la proporción $1 : \theta :: R_u : k$, de donde se obtiene:

$$\theta = \frac{k}{R_u} \quad \text{..............................} \quad (29)$$

En esta ecuación θ representa el arco expresado en partes de la unidad con que está descrito; para que exprese segundos, será necesario multiplicarlo por sen. 1″, y se tendrá poniendo el valor (26) de R_u:

$$\theta = \frac{k}{N \operatorname{sen.} 1''} (1 - e^2 \cos.^2 \varphi \cos.^2 u)^{-1} = \frac{k}{N \operatorname{sen.} 1''} + \frac{k e^2 \cos.^2 \varphi \cos.^2 u}{N \operatorname{sen.} 1''}$$

Haciendo $C = \frac{1}{N \operatorname{sen.} 1''}$ y calculando el logaritmo de la constante, tendremos:

$$\theta = Ck + (7.82441)\, Ck \cos.^2 \varphi \cos.^2 u \quad \text{..............} \quad (30)$$

El coeficiente C hace un papel importante en la práctica, y sus logaritmos se hallan calculados en una Tabla del Capítulo VII.

Como ejemplo calcularemos el ángulo que forman las verticales de dos puntos cuya distancia, reducida al nivel del mar, es $k = 36000^{m}$, con un azimut de 30° y siendo la latitud 21° 30′.

C............	8.5095868	Const............	7.82441
k............	4.5563025	$\cos.^2 \varphi$..........	9.93735
	3.0658893	....	3.06589
	1163″.83	$\cos.^2 u$...........	9.87506
	5 .04	....	0.70271

$\theta = 1168.''9 \;\; = 19' 28''.9$

19.—Reducción de segundos á metros.—Este problema, inverso del anterior, tiene por objeto hallar la extensión k de la línea geodésica cuya amplitud es θ. La ecuación (29) da, expresando á θ en segundos:

$$k = \theta R_u \operatorname{sen.} 1'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Sustituyendo el valor de R_u y el de C, ó lo que es lo mismo, despejando á k en la fórmula (30), resulta:

$$k = \frac{\theta}{C} - (7.82441)\,\frac{\theta}{C}\,\cos.^2\varphi \cos.^2 u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Ejemplo. A la latitud de 32° ¿qué distancia habrá entre dos puntos del meridiano cuya diferencia de latitud sea $\theta = 25' 37''$?

θ..................	3.1866739	Const............	7.82441
C..................	8.5093742	$\cos.^2 \varphi$...........	9.85684
	4.6772997	....	4.67730
	47566^{m}.3	$\cos^2 u$...........	0.00000
	228 .3	....	2.35855

$k = 47338.^{m}0$

En casos como este, puesto que se trata de una línea cuyo azimut

es nulo, sería preferible hacer uso de la fórmula (19) cuando se tiene una Tabla de los logaritmos de ρ como la que va al fin de este Capítulo. Expresando á θ en segundos y haciendo $A = \frac{1}{\rho \operatorname{sen.} 1''}$, se tendrá:

$$k = \frac{\theta}{A}$$

Los logaritmos de A son tan útiles como los de C, y constan igualmente en la Tabla del Capítulo VII. En el ejemplo precedente se obtendría:

θ........................	3.1866739	
A........................	8.5114678	
k........................	4.6752061	$k = 47338^{m}$

20.—Diferentes formas de las expresiones geodésicas.—La primera de las Tablas que terminan este Capítulo contiene los logaritmos de r, R y N calculados de 30′ en 30′ para todas las latitudes de nuestro país, con sus diferencias por 1′, cuyo objeto es el de facilitar las interpolaciones para cualquiera latitud intermedia. Estas diferencias son comunes á todos los logaritmos de aquellas cantidades, correspondientes á la misma línea horizontal, teniendo presente que r y R van decreciendo y N aumentando cuando crece la latitud, que es el argumento de la Tabla.

La Tabla II contiene los logaritmos de ρ y el valor del ángulo de la vertical $v = \varphi - \varphi'$, también con sus diferencias por 1′. La III da en metros, los valores crecientes de los grados del meridiano, y los decrecientes de los grados de los paralelos, con sus diferencias correspondientes.

Para calcular estas Tablas me he valido de las fórmulas desarrolladas hasta aquí; pero como no es raro encontrarlas en algunas obras bajo otras formas que presentan ventajas peculiares, daré á conocer estas transformaciones refiriéndome únicamente á las principales líneas del elipsoide. Algunos calculadores hacen uso de ángulos auxi-