reciera en ella el hombre y todos los demás séres que hoy la habitan.

El plan que me propuse en la redacción de este libro no me permite tratar de la Geodesia con toda la amplitud que brevemente se ha bosquejado; pero procuraré desarrollar con suficiente extensión aquellas partes de la ciencia que tienen aplicaciones más frecuentes y mayor utilidad desde el punto de vista práctico, objetos que constituyen el fin principal hacia el cual se dirigen mis esfuerzos.

Con esta mira, y sin descuidar por eso la exposición de ninguno de los procedimientos importantes de la Geodesia propiamente dicha, he dado una extensión comparativamente considerable á los de la Astronomía práctica. Los métodos que proporciona esta última ciencia pueden, en efecto, reemplazar en muchos casos á los de la primera, considerados unos y otros como medios de adquirir los datos necesarios para el levantamiento de las cartas geográficas; y acaso la Astronomía es, por lo general, más fácilmente aplicable que la Geodesia á la adquisición de tales elementos.

No debe olvidarse que escribo un libro para la América, cuyas condiciones de inmensos territorios y escasa población me han puesto en el deber de ensanchar, por una parte, los límites de la Topografía á expensas de la Geodesia; y por otra, en el de dar una importancia especial á las aplicaciones que la Geografía encuentra en la ciencia de los astros, y que son las que le constituyen quizá su más sólido fundamento.

PARTE PRIMERA.

GEODESIA PRÁCTICA.

CAPITULO I.

ELIPSOIDE TERRESTRE Y EXPRESIONES ANALÍTICAS DE SUS PARTES ELEMENTALES.

2.—Al considerar la figura general del globo terrestre es preciso prescindir por lo pronto de las desigualdades de su superficie, que casi desaparecen ante la magnitud de sus dimensiones, puesto que las montañas más elevadas del mundo apenas llegan á la milésima parte del radio del globo, y son comparativamente mucho menos perceptibles que las leves rugosidades que presenta la superficie de una naranja. Conviene, pues, suponer que la tierra está terminada por una superficie unida é igual, tal como la que ofrecen las aguas del Océano en su estado de reposo, prolongándola con la imaginación en todas direcciones por encima ó por debajo de los continentes con la misma ley de curvatura que el conjunto del globo. En este sentido es como debe entenderse todo lo que se diga respecto de la magnitud y forma asignadas á la tierra; pues si bien la realidad es ciertamente contraria á esta suposición, la ciencia tiene medios, que conoceremos en lo sucesivo, para hacer concordar la teoría establecida con los hechos tales cuales son, en aquellos casos en que la exactitud de un resultado pudiera quedar menoscabada en virtud de la hipótesis de una superficie uniforme, que tanto contribuye á facilitar la resolución de los problemas geodésicos.

Consideraciones puramente teóricas y fundadas con especialidad en la rotación diurna de la tierra al derredor de su eje polar, habían inducido ya á los geómetras á admitir que este planeta no debería ser exactamente esférico, sino ligeramente comprimido en los polos y ensanchado hacia las regiones ecuatoriales. Los trabajos geodésicos practicados hasta el presente por los geógrafos confirman experimentalmente este resultado de la teoría, dando á conocer que el globo terrestre es un cuerpo esferoidal algo irregular, pero cuya forma *se confunde sensiblemente con la de un elipsoide de revolución al derredor de su eje menor*. Sin perjuicio de consagrar más adelante una parte de esta obra á la exposición de los procedimientos por cuyo medio se ha podido llegar á esta conclusión, partiremos de la figura elipsoidal admitida, para establecer los cálculos relativos á las dimensiones del globo.

3.—Supuesto lo anterior, toda sección hecha en la tierra por un

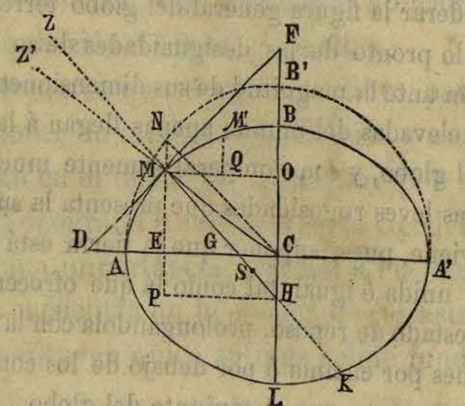

FIG. 1A

plano que pase por sus polos B y L (fig. 1ª), da por resultado la elipse generatriz $BALK$, cuyo plano no es más que el de un meridiano

terrestre; y las secciones hechas perpendicularmente al eje polar son círculos llamados *paralelos*. El mayor de estos círculos es el *ecuador*, cuyo radio es el semieje mayor CA de la elipse generatriz. Todas las demás secciones que pueden imaginarse oblicua ó paralelamente al semieje menor CB, producen elipses más ó menos excéntricas.

Los valores absolutos de los semiejes fueron calculados por el astrónomo Bessel valiéndose de las medidas dignas de más confianza, y obtuvo los resultados siguientes:

Radio ecuatorial $CA = a = 6377397$ metros.
Radio polar...... $CB = b = 6356079$ „

El conocimiento de los ejes basta para caracterizar perfectamente á la elipse generatriz; pero lo mismo puede conseguirse por medio de uno solo de los ejes y la relación que existe entre ambos, lo que á veces produce más sencillez en los cálculos. Vamos á establecer esta relación.

Se llama *aplanamiento* ó *compresión polar* á la diferencia de los semiejes referida al semieje mayor como unidad. Designando por α el aplanamiento, se tendrá, pues:

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

y si en esta expresión sustituimos los valores de a y b, obtendremos:

$$\alpha = 0.0033427 = \frac{1}{299.2} \text{ próximamente.}$$

Se llama *excentricidad* á la distancia del centro de la elipse á uno de los focos, tomando también por unidad el semieje mayor, de lo que se deduce:

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \text{ ó bien } e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Sustituyendo los valores precedentes se obtiene $e^2 = 0.0066743$.

Antes de pasar adelante notemos la pequeña diferencia que hay de la forma real de la tierra á la de una esfera. En efecto, por el valor del aplanamiento se ve que éste no es más que de 21 kilómetros, que equivalen á cosa de 5 leguas mexicanas; mientras que el radio medio de la tierra pasa de 6300 kilómetros, ó de 1500 leguas mexicanas. De aquí se infiere que en muchos casos puede suponerse esférica la tierra sin error de importancia.

Cualquiera de las expresiones (1) y (2) nos permitirá eliminar de los cálculos á uno de los ejes, reemplazándolo por la compresión polar ó por la excentricidad, pues de la primera se deduce:

$$b^2 = a^2 (1 - a)^2$$

y de la segunda:

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nótese de paso que si se elimina á b^2 entre estas dos ecuaciones, y se desarrolla la resultante, se encontrará la siguiente relación entre la excentricidad y el aplanamiento:

$$e^2 = 2a - a^2$$

y puesto que a es una pequeña fracción, su cuadrado podrá casi siempre despreciarse, lo que equivale á decir que *el cuadrado de la excentricidad es próximamente igual al doble de la compresión.*

4.—Si en la ecuación general de la elipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ se introduce el valor (3), se tendrá la ecuación del meridiano terrestre en función de las constantes a y e^2, á saber:

$$y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Vamos ahora á expresar las coordenadas rectangulares x é y de un punto M de la superficie de la tierra en función de los elementos que pueden fijar su posición sobre el meridiano. Si por M se levanta una perpendicular á la tangente FD se tendrá la línea vertical HZ del punto M. Esta línea prolongada encuentra la esfera celeste en un punto Z, que es el *zenit geográfico ó astronómico* de M, y la prolongación del radio central CM marca el *zenit geocéntrico* Z'. El ángulo MGA formado por la normal MG con el ecuador, se llama *latitud geográfica;* y el ángulo MCA formado por el radio con el mismo plano del ecuador, se llama *latitud geocéntrica* de M.

Las observaciones astronómicas que se practican con el objeto de caracterizar la posición de un lugar sobre su meridiano, suministran directamente la latitud geográfica; de suerte que este elemento es el que introduciremos en los cálculos, pues una vez obtenido por medio de la observación directa, servirá como argumento para determinar todos los datos geodésicos correspondientes á ese punto. Designemos por φ la latitud geográfica de M, por φ' su latitud geocéntrica y por R el radio central CM. Llamemos además N la *normal mayor* de M, que es la parte MH de su vertical comprendida desde la superficie de la tierra hasta el eje polar, y n la *normal menor* MG terminada en el ecuador. Con estas anotaciones los triángulos MHP y MGE dan respectivamente, teniendo presente que $HP = CE = x$ y que $ME = y$:

$$\left.\begin{array}{l} x = N \cos \varphi \\ y = n \operatorname{sen} \varphi \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

También del triángulo MCE resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x = R \cos \varphi' \\ y = R \operatorname{sen} \varphi' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Con el objeto de calcular las normales N y n busquemos otro sistema de valores de x é y, que puede hallarse por las consideraciones siguientes. Si el arco AM del meridiano crece una cantidad infinitamente pequeña, MM', la ordenada recibirá un incremento dy, la abscisa un decremento dx, y en el triángulo infinitesimal $MM'Q$ rectángulo en Q, el ángulo M' es igual á φ, por lo cual se tiene:

$$\frac{dx}{dy} = -\tan \varphi$$

Diferenciando ahora la ecuación (4) del meridiano, tendremos:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{(1 - e^2)x}$$

de donde resulta: $y = (1 - e^2) x \tan \varphi$.

Sustituyendo en esta última, primero el valor (5) de y, y después el de x, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{n \cos \varphi}{1-e^2} \\ y &= N(1-e^2)\,\text{sen.}\,\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

que es el nuevo sistema que nos permitirá calcular las normales.

5.—**Normal mayor.**—Si en la ecuación del meridiano se introduce el valor de x dado por la relación (5), y el último de y, que son los que contienen á N, resulta después de dividir por $1-e^2$:

$$N^2(1-e^2)\,\text{sen.}^2\varphi + N^2\cos.^2\varphi = a^2$$

Haciendo las multiplicaciones y teniendo presente que.............. $\text{sen.}^2\,\varphi + \cos.^2\,\varphi = 1$, se tendrá:

$$N^2(1-e^2\,\text{sen.}^2\,\varphi) = a^2$$

de donde se deduce:

$$N = \frac{a}{(1-e^2\,\text{sen.}^2\,\varphi)^{1/2}}$$

El denominador de N entra con mucha frecuencia en las fórmulas geodésicas, de modo que por abreviación lo designaré por r, esto es:

$$r = (1-e^2\text{sen.}^2\,\varphi)^{1/2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (8)$$

y entonces la expresión de la normal mayor será:

$$N = \frac{a}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

Calculemos, por ejemplo, la normal que corresponde á la Escuela de Ingenieros de México, cuya latitud es $\varphi = 19°\ 26'\ 12''.3$.

e^2..................	7.8244057	r^2..................	9.9996789
sen. φ............	9.5221390		
„	9.5221390	r..................	— 9.9998394
		a..................	6.8046435
	6.8686837		
	0.00073907	N..................	6.8048041
$r^2 =$	0.99926093		$N = 6379755$ metros.

6.—**Normal menor.**—Sustituyendo en la ecuación (4) los valores de x é y que contienen á n, se tendrá por medio de un cálculo semejante al anterior:

$$n = \frac{a(1-e^2)}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (10)$$

Para la latitud de la Escuela de Ingenieros se tiene:

N................	6.8048041	
$1-e^2$............	9.9970917	
n..................	6.8018958	$n = 6337175^{\text{m}}$.

7.—**Angulo de la vertical.**—Si se dividen una por otra las ecuaciones (5), se hace lo mismo con las (6) y se igualan ambos valores de $\frac{y}{x}$, resulta:

$$\tan.\,\varphi' = (1-e^2)\tan\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (11)$$

relación que liga las latitudes geográfica y geocéntrica, y permite calcular una de ellas conociendo la otra. Pero en lugar de proceder así, es preferible muchas veces calcular la diferencia que hay entre ellas, la que no es otra cosa más que el pequeño ángulo $CMG = ZMZ'$ formado por la vertical y el radio, y por lo cual se llama comunmente *ángulo de la vertical.* Si lo designamos por v, el trángulo $M\ C\ G$ dará en efecto:

$$v = \varphi - \varphi'$$

Tomando la *tangente* de v y sustituyendo en el segundo miembro el valor precedente de tan. φ', se obtiene:

$$\tan.\,v = \frac{\tan.\,\varphi - (1-e^2)\tan.\,\varphi}{1+(1-e^2)\tan.^2\varphi} = \frac{e^2\tan.\,\varphi}{\sec.^2\varphi - e^2\tan.^2\varphi}$$

Multiplicando numerador y denominador por $\cos.^2\,\varphi$, y recordando que $\text{sen.}\ 2\,\varphi = 2\,\text{sen.}\,\varphi\cos.\,\varphi$, se tendrá finalmente:

$$\tan.\,v = \frac{0.5\,e^2\,\text{sen.}\ 2\,\varphi}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (12)$$

Como v es siempre muy pequeño, no hay error de importancia en tomar el arco por su tangente, así como en suprimir el denominador que difiere muy poco de 1, con lo cual se tiene expresando á v en segundos:

$$v = \frac{0.5\, e^2}{\text{sen}\, 1''}\, \text{sen.}\, 2\, \varphi = (2.83780)\, \text{sen.}\, 2\, \varphi$$

La cantidad contenida en el paréntesis es el logaritmo del factor constante $\frac{0.5\, e^2}{\text{sen.}\, 1''}$. Calculemos la latitud geocéntrica de la Escuela de Ingenieros.

$\frac{1}{2} e^2$	7.5233757		
sen. $2\, \varphi$	9.7976849	$\varphi =$	$19° 26' 12''.3$
r^2	$-$ 9.9996789	$v =$	$-7\ 12\ .3$
tan. v	7.3213817	$\varphi' =$	$19° 19' 00''.0$

La segunda fórmula daría:

Const	2.83780	
sen. $2\, \varphi$	9.79768	
v	2.63548	.... $v = 432''.0 = 7' 12''.0$

8.—**Radio central.**—El triángulo $M\,C\,E$ da:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

Sustituyendo los valores (5) y ejecutando las operaciones, se tiene:

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\,(1 - 2\, e^2\, \text{sen.}^2\, \varphi + e^4 \text{sen.}^2\, \varphi)\ \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Descomponiendo en dos partes el segundo término dentro del paréntesis, la ecuación anterior puede escribirse así:

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\,[r^2 - e^2 (1 - e^2)\, \text{sen.}^2 \varphi]$$

de la cual resulta:

$$R = a \left(1 - \frac{e^2 (1 - e^2)\, \text{sen.}^2 \varphi}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Esta es la forma que se da por lo común á la expresión del radio;

pero si se sustituye el valor de r y se ejecuta la división indicada, se obtendrá sucesivamente:

$$\begin{aligned} R &= a[1 - e^2(1-e^2)\, \text{sen.}^2\, \varphi - e^4(1-e^2)\, \text{sen.}^4\, \varphi - e^6(1-e^2)\, \text{sen.}^6\, \varphi - \ldots\ldots]^{1/2} \\ &= a[1 - e^2 \text{sen.}^2\, \varphi + e^4 \text{sen.}^2\, \varphi - e^4 \text{sen.}^4\, \varphi + e^6 \text{sen.}^4\, \varphi - e^6\, \text{sen.}^6\, \varphi + \ldots\ldots]^{1/2} \\ &= a[r^2 + (e^4 \text{sen.}^2\, \varphi + e^6\, \text{sen.}^4\, \varphi + \ldots\ldots\ldots)\, \text{cos.}^2\, \varphi]^{1/2} \end{aligned}$$

Reflexionando que e es una pequeña fracción, convendremos en que podrán despreciarse sin notable error su cuarta y siguientes potencias, de lo que resulta:

$$R = a\, r\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

que es una expresión suficientemente exacta y más sencilla.

De la ecuación (A) es fácil derivar otra fórmula casi tan breve como la anterior y enteramente exacta. En efecto, el valor de r da:

$$r^4 = 1 - 2\, e^2\, \text{sen.}^2\, \varphi + e^4\, \text{sen.}^4\, \varphi$$

y como los dos primeros términos son idénticos á los contenidos dentro del paréntesis en la ecuación (A) resulta por sustitución:

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2}{r^2}\,(r^4 + e^4\, \text{sen.}^2\, \varphi - e^4\, \text{sen.}^4\, \varphi) \\ &= \frac{a^2}{r^2}\,(r^4 + e^4\, \text{sen.}^2\, \varphi\, \text{cos.}^2\, \varphi) \\ &= \frac{a^2}{r^2}\,(r^4 + \tfrac{1}{4}\, e^4\, \text{sen.}^2\, 2\, \varphi) \end{aligned}$$

Pero la ecuación (12) da: $\frac{1}{4}\, e^4\, \text{sen.}^2\, 2\, \varphi = r^4\, \text{tan.}^2\, v$, de donde se deduce: $R^2 = a^2\,(r^2 + r^2\, \text{tan.}^2\, v)$ y por último:

$$R = \frac{a\, r}{\text{cos.}\, v}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

El valor de v es tan pequeño que casi siempre es permitido tomar la unidad por su coseno, en cuyo caso vuelve á resultar la expresión (13).

Daré todavía otra fórmula para calcular el valor del radio, no porque ofrezca grandes ventajas respecto de las anteriores, sino porque suele encontrarse en algunas obras de Astronomía. Igualando los dos valores (5) y (6) de x, y sustituyendo el último valor de R, se tiene:

$$r^2 = \frac{\cos.\ \varphi \cos.\ v}{\cos.\ \varphi'}$$

con lo que la expresión (14) se convierte en:

$$R = a\left(\frac{\cos\varphi}{\cos.\ \varphi' \cos.\ v}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ .... } (15)$$

Apliquemos el cálculo de la fórmula (14) á la latitud de la Escuela.

a..................	6.8046435		
r..................	9.9998394		
$a\,r$................	6.8044829	.... $a\,r =$	6375039^m
cos. v............	6.9999991		
R..................	6.8044838	.... $R =$	6375052^m

Se ve que el resultado de la ecuación (13) no difiere más que 13^m del valor exacto de R, cantidad que es insignificante respecto de una magnitud tan considerable, de suerte que en general adoptaré la primera como expresión del radio en el curso de esta obra, por lo menos cuando no se advierta lo contrario.

9.—**Radio de curvatura del meridiano.**—Se sabe que en la elipse, como en las demás secciones cónicas, el radio de curvatura ρ es igual al cubo de la normal menor dividido por el cuadrado de la ordenada correspondiente al foco, la cual es igual al semiparámetro de la curva. Para hallar la ordenada del foco, hagamos $x = \sqrt{a^2 - b^2} = a\,e$, con lo que la ecuación (4) de la elipse dará: $y^2 = a^2(1 - e^2)^2$, y entonces:

$$\rho = \frac{\dfrac{a^3(1-e^2)^3}{r^3}}{a^2(1-e^2)^2} = \frac{a(1-e^2)}{r^3} \text{ .... } (16)$$

Para la Escuela de Ingenieros se tendrá:

a..................	6.8046435		
$1-e^2$............	9.9970917		
r^3................	$-$ 9.9995183		
ρ..................	6.8022169	.... $\rho =$	6341864^m

10.—**Tangente, subtangente, subnormal, etc.**—El cálculo de estas líneas es tan sencillo que se deduce inmediatamente de la figura, á saber:

Tangente......... $MD = \dfrac{y}{\cos.\ \varphi} = n \tan.\ \varphi = \dfrac{a(1-e^2)\tan.\ \varphi}{r}$

Tangente......... $MF = N \cot.\ \varphi = \dfrac{a \cot.\ \varphi}{r}$

Subtangente...... $ED = MD \operatorname{sen.} \varphi = \dfrac{a(1-e^2)\tan.\ \varphi \operatorname{sen.} \varphi}{r}$

Subnormal...... $EG = n \cos.\ \varphi$

La diferencia de las normales, y las distancias del centro de la tierra á los puntos en que la normal mayor encuentra al plano ecuatorial y al eje polar, son:

$$GH = N - n = \frac{a\,e^2}{r}$$

$$CG = \frac{a\,e^2 \cos.\ \varphi}{r}$$

$$CH = \frac{a\,e^2 \operatorname{sen.} \varphi}{r}$$

No creo necesario hacer aplicaciones numéricas de estas fórmulas, porque no presentan dificultad alguna.

11.—Ahora que tenemos calculadas las expresiones de las principales líneas del elipsoide, es interesante investigar las variaciones que sufren con los cambios de posición del punto M á que pertenecen, pues todas ellas dependen del valor de la latitud. Según la forma de esas expresiones se ve que al paso que crece la latitud, aumentan de valor las dos normales y el radio de curvatura del meridiano; mientras que disminuye el radio central. En cuanto al ángulo de la vertical, crece hasta la latitud de 45°, punto en que llega á su *maximum*, y comienza en seguida á decrecer cuando continúa aumentando la latitud.

Si suponemos al punto M sucesivamente en el ecuador, en la latitud media de 45°, y por último, en el polo, podremos formar la siguiente tabla de los valores que adquieren las dos normales, el radio central, el de curvatura y el ángulo de la vertical.

	$\varphi = 0$	$\varphi = 45°$	$\varphi = 90°$
Normal mayor.........	$N = a$	$N = \dfrac{a}{\left(1 - \frac{1}{2} e^2\right)^{\frac{1}{2}}}$	$N = \dfrac{a}{(1-e^2)^{½}}$
Normal menor........	$n = a(1-e^2)$	$n = \dfrac{a(1-e^2)}{\left(1 - \frac{1}{2} e^2\right)^{\frac{1}{2}}}$	$n = a(1-e^2)^{½}$
Radio central.........	$R = a$	$R = a\left(1 - \frac{1}{2} e^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$R = a(1-e)^{½}$
Radio de curvatura...	$\rho = a(1-e^2)$	$\rho = \dfrac{a(1-e^2)}{\left(1 - \frac{1}{2} e^2\right)^{\frac{3}{2}}}$	$\rho = \dfrac{a}{(1-e^2)^{½}}$
Angulo de la vertical.	$v = 0$	$v = \dfrac{0.5\, e^2}{\left(1 - \frac{1}{2} e^2\right) \text{sen. } 1''}$	$v = 0$

Por ella se ve que en el ecuador se tiene $N = R$, y $n = \rho$; mientras que por el contrario, en el polo $N = \rho$, y $n = R$. Por lo tocante á v se deduce que tanto en el ecuador como en el polo coincide el zenit geográfico con el geocéntrico. A la latitud de 45° el radio central R es igual á ρ con muy corta diferencia, pues sus valores pueden escribirse así: $R = a(1 - \frac{1}{4} e^2)$, y $\rho = a(1 - e^2)(1 + \frac{3}{4} e^2) = a(1 - \frac{1}{4} e^2)$. Nótese igualmente que la expresión del radio polar desarrollada también hasta la segunda potencia de e, da: $a(1 - \frac{1}{2} e^2)$, y que si se multiplica por el radio ecuatorial y se extrae después la raíz cuadrada del producto, se tiene: $a(1 - \frac{1}{2} e^2)^{½}$, que es precisamente el valor del radio á 45° de latitud; luego *el radio central á la latitud media puede suponerse igual al término medio geométrico entre los radios ecuatorial y polar*, ó bien:

$$R_{45} = \sqrt{a\,b}.$$

12.—**Arcos del meridiano.**—La expresión del arco elemental de una curva es:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$

y diferenciando el valor (5) de x con relación á la variable φ, resulta:

$$\mathrm{d}x = -\frac{a}{r} \text{sen. } \varphi\, \mathrm{d}\varphi + \cos. \varphi\, \mathrm{d}\frac{a}{r} = -\frac{a}{r} \text{sen. } \varphi\, \mathrm{d}\varphi - \frac{a \cos. \varphi\, \mathrm{d}r}{r^2}$$

Sustituyendo el valor de $\mathrm{d}r$, que es: $\mathrm{d}r = -\dfrac{e^2 \text{sen. } \varphi \cos. \varphi\, \mathrm{d}\varphi}{r}$, se tendrá:

$$\mathrm{d}x = -\left(\frac{a}{r} \text{sen. } \varphi - \frac{a e^2 \text{sen. } \varphi \cos.^2 \varphi}{r^3}\right) \mathrm{d}\varphi = -\frac{a \text{ sen. } \varphi}{r^3} (r^2 - e^2 \cos.^2 \varphi)\, \mathrm{d}\varphi$$

y por último:

$$\mathrm{d}x = -a(1 - e^2) \frac{\text{sen. } \varphi\, \mathrm{d}\varphi}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

De una manera semejante podría calcularse $\mathrm{d}y$; pero puesto que se tiene la relación: $\mathrm{d}y = -\cot. \varphi\, \mathrm{d}x$, se hallará por sustitución:

$$\mathrm{d}y = a(1 - e^2) \frac{\cos. \varphi\, \mathrm{d}\varphi}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Introduciendo ambos valores en la expresión diferencial del arco, se obtendrá fácilmente:

$$\mathrm{d}s = \frac{a(1 - e^2)}{r^3} \mathrm{d}\varphi = \rho . \mathrm{d}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

lo cual indica que *la extensión de un arco pequeño del meridiano es igual á la diferencia de latitud de sus extremos multiplicada por el radio de curvatura.* Para mayor precisión debe tomarse el radio que corresponde á la latitud del medio del arco.

Es necesario tener presente que $\mathrm{d}\varphi$ indica un arco expresado en partes del radio trigonométrico, por lo que al aplicar la fórmula si se quiere introducir ese arco por su número de segundos, deberá multiplicarse por sen. 1''. En cuanto á $\mathrm{d}s$ es una extensión lineal