APÉNDICE

OPERACIONES SUPERIORES DE LA ARITMÉTICA

APLICADAS ESTRICTAMENTE Á LOS CÁLCULOS MERCACTILES.

FORMULADAS

POR BERNARDINO DEL RASO

1877

OPINIONES DE PERSONAS IDÓNEAS

QUE FAVORECEN Á ESTA ARITMÉTICA.

Las cartas que á continuacion se exponen, sirven de garantía á la citada Aritmética y honran demasiado á su autor:

«Casa de vd., Marzo 8 de 1878.—Sr. D. Bernardino del Raso.—Presente.—Mi estimado compadre y amigo:—Anoche recibí su esquela en que me manifiesta el deseo de que, con entera franqueza, le exponga el juicio que haya yo formado de la Aritmética Mercantil que acaba vd. de escribir y que debe ver la luz pública próximamente.

«He leido y examinado detenidamente los manuscritos correspondientes á dicha obra, y por lo mismo puedo decir á vd. con verdadera complacencia que, salvando las ligeras observaciones que le hice sobre las reglas de Descuento y de Cambio, las que no dudo habrán sido atendidas por vd., creo que ella llena completamente el objeto que vd. se propuso al escribirla, y que sustituye con ventaja á todas cuantas obras conozco de las que se han escrito sobre esta materia.

«El sistema adoptado por vd. en el desarrollo del plan de su obra es, en mi humilde concepto, el más á propósito para la enseñanza, pues sin ser difuso deja todo perfectamente explicado. Las definiciones que vd. asienta, además de ser nuevas, son claras y exactas; las reglas fijadas para todas las operaciones son sencillas y precisas; y por último, contiene algunas ideas que vd. ha sido el primero en darlas á conocer.

«Por lo expuesto, creo que al dar vd. á luz su obra, hace un positivo servicio á la juventud estudiosa, y que podrá obtener con ella los mejores resultados.

«Estoy bien persuadido de que mi juicio sobre este asunto no es de peso; pero sí puede vd. estar seguro de que el emitirlo de la manera que lo hago es justo y sincero, pues si hubiera encontrado defectuosa la obra se lo manifestaria con toda franqueza, y en ello creeria darle una prueba de verdadera amistad.

«Así pues, creo que con toda confianza puede vd. emprender la impresion y publicacion de su obra, la que deseo le produzca los buenos resultados que merecen sus constantes esfuerzos y trabajos; y entretanto disponga del afecto de su compadre y amigo que lo aprecia y B. S. M.—*J. M. Haro.*»

«Sr. D. Bernardino del Raso.—Casa de vd., México, Marzo 11 de 1878.—Muy señor mio y amigo:—He examinado con el detenimiento y escrupulosidad que vd. me encareció su Tratado de Aritmética, y aunque insuficiente para juzgar de su notorio mérito, me atrevo á asegurar á vd. que es la primera en su género, y lo felicito porque con este trabajo consiguió el objeto que se proponia de hacer un bien no solo á la juventud estudiosa, sino tambien á algunas personas que dedicadas á los números quieran ilustrarse con algunas de las muy buenas doctrinas de su importante Tratado.

«Sabe vd. que bien lo quiere su afectísimo amigo Q. S. M. B.—*Manuel Beristain.*»

«Casa de vd., Marzo 15 de 1878.—Sr. D. Bernardino del Raso.—Presente.—Muy señor mio y de mi aprecio:—Al devolverle los diversos cuadernos que forman la obra que va vd. á publicar sobre Aritmética Mercantil, me es grato felicitar á vd. por la realizacion del plan tan útil como necesario que vd. se propuso, pues no existiendo ninguna publicacion análoga, presta vd. con su obra un positivo servicio á la juventud, que podrá estudiar con facilidad las cuestiones prácticas del comercio, reasumidas en ella con tanta maestría como sencillez y claridad.

«Doy á vd. las gracias por la confianza con que se sirvió vd. acoger las observaciones que me prometí hacerle, á pesar de mi insuficiencia, pero revestido de la mejor buena voluntad, esperando que el público sabrá premiar sus afanes y constante celo por la educacion de la juventud.

«Me repito de vd. afectísimo amigo y atento seguro servidor Q. S. M. B.—*A. Labat.*»

OBSERVACIONES ESENCIALES

RESPECTO DE LAS CIRCUNSTANCIAS QUE DEBEN CONCURRIR EN EL VERDADERO ARITMÉTICO.

Tres son las circunstancias fundamentales y difíciles que respecto de la ciencia de la Aritmética debe poseer la persona que con propiedad quiera conocerla.

La primera es el conocimiento de las reglas que la referida ciencia marca para verificar las operaciones numéricas respectivas.

La segunda es el conocimiento fundamental que debe adquirirse para la debida aplicacion de esas reglas á problemas propuestos. Esta circunstancia comprende grandes dificultades en la práctica, y sobre ella no conoce el autor de esta obra, escritor de la materia que se haya fijado en tal punto, bien delicado por cierto. Por esta razon se hará notar con especialidad en estas operaciones de Aritmética la dificultad de que se va tratando.

La tercera se refiere á que el calculador debe fijarse muy esencialmente en que el resultado de la operacion que resuelva sea el que netamente deba aparecer. Tal circunstancia generalmente se descuida en la enseñanza de esta materia, no procurando más que el cálculo se verifique con la mayor prontitud, lo cual comunmente trae por consecuencia que los resultados que se obtienen son absurdos.

Para subsanar esta crasísima falta, llévese la máxima constante de la extremada desconfianza en los cálculos, repitiendo parcialmente, por dos veces lo menos, cada uno de esos cálculos.

TEORÍAS INDISPENSABLES Y PRÁCTICA DE LA ARITMÉTICA.

La Aritmética en general se define de esta manera: LA CIENCIA DE LOS NÚMEROS.

Esta definicion general da á entender que la referida ciencia tiene por objeto la composicion y descomposicion de los números, combinándolos de infinidad de maneras, ya para aumentarlos, ó ya para disminuirlos, segun las reglas que para ello marca la misma ciencia y á fin de encontrar los resultados de cuestiones propuestas.

Por esto, de esta definicion general provienen otras particulares relativas á los distintos procedimientos que deben seguirse al componer y descomponer los referidos números, y lo que da márgen, á juicio del autor de esta obra, á dividir en tres géneros distintos la CIENCIA GENERAL DE LA ARITMÉTICA.

Los tres géneros indicados son:

Aritmética Mecánica ó *Abstracta.*
Aritmética Mercantil ó *Comercial.*
Aritmética Razonada ó *Demostrada.*

La primera es el conjunto de reglas para verificar las operaciones numéricas que planteadas se presentan, pero sin comprender el conocimiento necesario para aplicar dichas reglas á problemas propuestos.

La segunda se considera como la ciencia de aplicar las reglas establecidas á problemas expuestos, resolviéndolos por fórmulas, y por consecuencia abreviadamente.

La tercera se define como la ciencia de resolver las operaciones numéricas por todas las reglas establecidas, manifestando por último con otras operaciones numéricas distintas, el fundamento que se tuvo para observar los procedimientos que en las primeras se verificaron.

Por fórmula se entiende el extracto ó reduccion metódica de cualquiera operacion numérica que con extension se hubiere practicado.

Segun el título que se le ha dado á la parte de la Aritmética de que se va tratando, ella se referirá esencialmente á la que se ha dado á conocer como Aritmética Mercantil ó Comercial.

Constará de una seccion aislada en que se comprenderán operaciones heterogéneas resueltas por procedimientos no comunes. Despues contendrá, por su órden riguroso, las operaciones superiores más usuales en la práctica mercantil, y que se tomarán desde la Regla de Tres hasta la conclusion de la Aritmética general.

Sin embargo del género de Aritmética de que se trata, todas las operaciones se explicarán competentemente practicándolas con todas las cifras necesarias, con el objeto de encontrar los resultados con absoluta exactitud y á fin de no dejar duda alguna sobre sus procedimientos.

Bernardino del Raso.

PRIMERA SECCION

Operaciones heterogéneas de la parte anterior á la Regla de Tres.

Para sumar, y á fin de colocar la suma con la mayor seguridad posible, acostumbran los prácticos colocar separadamente y en forma de sumandos los resultados que de la suma de cada columna se encuentran hasta llegar á la última columna de las unidades superiores, cuyo resultado se coloca como se deja dicho, teniendo cuidado de asentar en el lugar de las unidades sencillas las superiores que por último se encontraren. En tal caso, las cifras que comprende esta columna, colocadas en el órden natural, expresarán la suma total que se buscaba, la que se colocará en su lugar respectivo, debiéndose considerar para esto como unidades superiores las que hayan terminado la columna formada de que se viene tratando.

PRÁCTICA.

Primer ejemplo:	27,535,75 cs.		SUMA.. 343,816,58
	42,968,37 ,,	48	
	9,647,25 ,,	55	
	97,784,45 ,,	56	
	83,792,50 ,,	71	
	1,956,62 ,,	68	
	893,52 ,,	53	
	7,329,45 ,,	34	
	4,193,25 ,,	3	
	194,87 ,,		
	67,520,55 ,,		
SUMA........	343,816,58 cs.		

Segundo ejemplo:	3.109,025	49	Suma. 22.572,199
	4.908,249	39	
	7.925,748	31	
	5.114,223	52	
	149,975	27	
	293,152	35	
	128,649	22	
	943,178	2	
SUMA.........	22.572,199		

La práctica de la formacion de la columna compuesta con los resultados de las sumas parciales, presenta las ventajas de encontrar la suma general en la columna de las unidades, la que se asentará en su lugar respectivo, cuando se haya rectificado absolutamente. La otra ventaja consiste en que en la segunda columna que representa las unidades superiores que han de llevarse á las columnas siguientes, se hallan por su órden, facilitándose así su encuentro cuando fuere necesario. La utilidad de este procedimiento se conoce en el caso de practicar sumas dilatadas y repetidas, como sucede en los libros de contabilidad.

En la division de números enteros hay que fijarse en que si los términos de la operacion son concretos, no siempre deberá ponerse el mayor por dividendo y el menor por divisor, como sucede generalmente en la division de números abstractos.

La regla que debe seguirse en el caso de que se trata es esta:

"En la division de números concretos generalmente se pondrá por dividendo el término que fuere de la especie del cociente que se busca."

PRÁCTICA.

Ejemplo 1º—3,500 lápices costaron \$280: ¿cuánto valdrá cada lápiz?

El dividendo será en esta cuestion el importe en pesos, supuesto que en el cociente se busca el precio en moneda.

\$280,0,0, | 3,500 lápices.
0 0 0 0   0,08 centavos valor del lápiz.

Ejemplo 2º—3,500 lápices costaron \$280: ¿cuántos lápices resultan por un peso?

En este caso se buscan lápices en el cociente; por lo mismo el dividendo deberá representar la misma especie.

3,5 0,0, lápices | \$280
0 7 0 0 $12\frac{140}{280}$ lápices por un peso
1 4 0

Hay casos excepcionales en que la regla de que se trata es insuficiente, por ser de una misma especie el dividendo y el divisor, como se ve en este problema:

Ejemplo 3º—¿Cuántas arrobas de azúcar, á \$2, se deberán entregar en pago de \$600?

Para determinar cuál ha de ser el dividendo en los problemas como el presente, solo el raciocinio puede guiar, reflexionando en que la cantidad que se tiene que pagar deberá ser mayor que el precio del efecto que en

compensacion se entregue, y por consecuencia la mayor cantidad será la que por dividendo se ponga. La regla general anterior no puede aplicarse en el presente caso, porque el dividendo y divisor *son de la misma especie.*

\$600 | \$2
000   300 @ de azúcar serán las que deban entregarse.

Segun se dejó indicado en las observaciones esenciales con que comienza esta parte de la Aritmética, el punto verdaderamente difícil respecto de esta ciencia, es el de la aplicacion propia y precisa de sus reglas á los problemas propuestos. Tal dificultad se advierte muy esencialmente en la aplicacion de las reglas conocidas para las operaciones de los quebrados. Dichas operaciones, segun el juicio del autor de esta obra, deben conocerse y practicarse suficientemente para poder formarse *un verdadero aritmético.*

En las operaciones de quebrados sucede con la mayor frecuencia que problemas realmente de multiplicar quebrados se quieran resolver por las reglas de dividir ó vice versa, por ejemplo:

La vara de bretaña vale $\frac{3}{4}$ de peso: ¿cuánto valdrán $\frac{2}{3}$ de vara?

Para aplicar la regla debida en el presente caso, que generalmente se equivoca, es necesario reflexionar en que el expresado problema pide que se tomen dos terceras partes del valor *neto* de la unidad, que la definicion de multiplicar dice que es "*tomar un número tantas veces como diga otro.*"

Por todo esto, la regla que propiamente debe aplicarse, es la de multiplicar un quebrado por otro:

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \text{ peso ó cuatro reales.}$$

El resultado de esta operacion satisface realmente lo que el problema pide, supuesto que si una vara que contiene $\frac{3}{3}$ costó $\frac{3}{4}$ de peso ó seis reales, cada tercia costará dos reales, y por consecuencia dos tercias valdrán los cuatro reales encontrados.

Se compraron $\frac{3}{4}$ de vara en $\frac{6}{8}$ de peso: ¿cuánto valdrá la vara?

Así como el problema anterior generalmente los poco diestros quieren resolverlo por las reglas de dividir, debiendo aplicar las de multiplicar, en el presente sucede lo contrario; aplican las de multiplicar en vez de las de dividir.

Debe resolverse este problema por las reglas de division, atendiendo á los principios esenciales, y el que aquí debe aplicarse es el que determina *"que en la division de un quebrado propio por otro tambien propio, el cociente resultará mayor que el dividendo."*

De esto se infiere que el problema de que se trata debe resolverse por la regla de dividir un quebrado por otro, supuesto que se trata de averiguar el valor de la vara, sabido el de una fraccion, que por consecuencia precisa ha de resultar mayor.

$$\tfrac{6}{8} \text{ de peso} \div \tfrac{3}{4} \text{ de vara} = \tfrac{24}{24} \text{ de peso} = \$1.$$

Este resultado no deja duda, pues que $\frac{6}{8}$ valor de las $\frac{3}{4}$ más $\frac{2}{8}$ valor de $\frac{1}{4}$ que completa la vara, hacen el peso encontrado.

Organizando esta demostracion, queda en estos términos:

$$\begin{array}{ll} \tfrac{6}{8} \text{ valor de las} & \tfrac{3}{4} \\ +\tfrac{2}{8} \text{ valor de} & \tfrac{1}{4} \\ \hline =\tfrac{8}{8} = 1 \text{ vara que vale} & \tfrac{4}{4} = \$1 \end{array}$$

Con los ejemplos anteriores se manifiesta en parte la diferencia que existe entre conocer y verificar abstractamente las reglas de la Aritmética, y la dificultad grande que existe respecto de concretarlas ó darles su verdadera aplicacion á problemas propuestos.

Para resolver con plena seguridad las cuestiones de quebrados, aplíquese la Regla de Tres, como en el siguiente caso:

Si $\frac{2}{3}$ de vara costaron $\frac{3}{4}$ de peso, ¿cuánto costarán $\frac{5}{6}$ de vara?

$$\tfrac{2}{3} : \tfrac{5}{6} :: \tfrac{3}{4} : X = \tfrac{45}{48} \text{ de peso.}$$

Este resultado es el que netamente debia encontrarse. La prueba es esta:

$$\begin{array}{ll} \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{6} \text{ valen} & \tfrac{3}{4} = \tfrac{36}{48} \\ +\tfrac{1}{6} \text{ valdrá la cuarta parte} & \tfrac{9}{48} \\ \hline =\tfrac{5}{6} \text{ que valen} & =\tfrac{45}{48} \end{array}$$

Muchos casos como los que se dejan expuestos se podrian presentar corroborando lo que se deja asentado respecto de la insuficiencia de la Aritmética abstracta, y de las dificultades y errores que se tienen cuando se carece del conocimiento indispensable para su propia aplicacion. Sin embargo, por lo que antecede se puede formar idea de todo lo que esto quiere decir.

Algunos casos de la Multiplicacion de Denominados.

Como es sabido, la multiplicacion de denominados se puede verificar por dos métodos generales, que son: el de reduccion á quebrados y el de partes alícuotas; advirtiendo que los denominados tambien se reducen á decimales, practicándose con estos las mismas operaciones que con los enteros, con algunas modificaciones. Como método especial y que presenta ventajas considerables, se conoce el de *cuarterola*. Se considera este método como especial, porque solo puede aplicarse cuando el multiplicando expresa unidades procedentes del *quintal*, como arrobas, libras, onzas, etc. Hay otros casos en que casualmente se presenta la misma combinacion, y en que las unidades del multiplicando, aun cuando sean de distinto género de las provenidas del quintal, se encuentran relacionadas bajo el mismo respecto; en tales casos puede por supuesto aplicarse la referida regla de cuarterola.

El problema que por ejemplo se va á presentar se resolverá por el método de partes alícuotas y despues por el de cuarterola, advirtiendo antes que *partes alícuotas son las partes exactas que se pueden tomar de cualquiera cantidad.*

Al resolver por este procedimiento el problema que á continuacion se expone, se considerarán sus partes alícuotas, tomándolas en enteros y quebrados; cuyo método es mucho más ventajoso que el de tomar dichas partes alícuotas como comunmente se hace, sacándolas en tres ó más especies de unidades.

EJEMPLO RESUELTO POR PARTES ALÍCUOTAS.

24 @ 5 ℔ 8 oz. azúcar, á \$2–2 rs. la arroba, ¿cuánto valdrán?

$$\begin{array}{l} \quad 24 \text{ @ } 5 \text{ ℔ } 8 \text{ oz.} \\ \times \$\ 2{,}2 \text{ rs.} \\ \hline \quad 48 \\ \quad 6 \\ \quad 0\ \tfrac{18}{40} = \tfrac{180}{400} \\ \quad 0\ \tfrac{18}{400} = \tfrac{18}{400} \\ \hline \$54{,}495\ \tfrac{198}{400} = 1980 \ \lfloor 400 \\ \qquad\qquad\qquad 3800 \quad 0{,}495 \\ \qquad\qquad\qquad 2000 \\ \qquad\qquad\qquad 000 \end{array}$$

Para verificar las partes alícuotas sacándolas en números mistos como se efectuó en el caso sencillo que antecede, y con más razon en casos complicados, se necesita indispensablemente conocer y manejar diestramente los quebrados.

EL MISMO EJEMPLO RESUELTO POR CUARTEROLA.

Se verifica por la siguiente regla:

Multiplíquense las libras por 4, cuyo producto deberá quedar representado siempre por decenas y unidades, supuesto que de ellas constan las 25 libras que contiene la arroba. Para que lo expuesto tenga verificativo, aun cuando las libras no sean más de una, dos ó tres, ó en general las represente un número dígito, escríbanse dichas libras anteponiéndoles el cero que indique la carencia de las decenas.

Respecto de las onzas que hubiere, se les tomará su cuarta parte, debiendo figurar el número que resultare como sumando que se agregará al producto hallado antes, advirtiendo que si las onzas no dieren cuarta parte exacta, la diferencia se representará por el quebrado correspondiente, que podrá expresarse en forma decimal si se quiere.

Si hubiere que buscar el valor de adarmes, se conseguirá tomando tambien su cuarta parte que vendrá á figurar en forma de quebrado ó decimal, para sumarse con las partidas anteriores.

La suma que segun lo indicado resultare expresará una decimal de arroba, por lo que no faltará ya en este caso más que colocar á la izquierda de la referida decimal la cantidad de arrobas que el problema ministrare, ó cero si no las hubiere, separando con la coma respectiva los enteros de los decimales.

24 @ 5 ℔ 8 oz., á \$2–2 rs. @
4
20
2
24,22
× \$$2\frac{1}{4}$
4844
$605\frac{2}{4}$
\$$54{,}49\frac{2}{4}$ = \$54,495

Como se ve por la operacion de cuarterola anterior, ella abrevia y simplifica extraordinariamente el procedimiento.

El fundamento de la misma operacion consiste en reducir á decimales las unidades inferiores de la arroba, cuya reduccion indirecta no es fácil entenderla sin la demostracion respectiva, y la cual á continuacion se expone.

Explicacion de la Regla de Cuarterola.

La unidad superior con que comienzan generalmente los denominados de peso, es la arroba. Esta como unidad absoluta contiene cien centavos; pero como dicha unidad comprende 25 libras, cada una de estas equivale por consecuencia á cuatro centavos de arroba. Por esto para reducir libras á centavos de arroba basta multiplicarlas por *cuatro*, cuya operacion funda la regla de cuarterola. Respecto de las onzas que puede contener el denominado, bastará tomar su cuarta parte para convertirlas en centavos de arroba. Esto sucede en razon de que las onzas con relacion á la arroba representan el numerador de un quebrado, cuyo denominador será 400 (que son las onzas que tiene la arroba), el cual simplificado por *cuatro* expresará centavos de arroba, supuesto que en tal caso su denominador quedó reducido á 100. Todo el procedimiento relativo á las onzas equivale á tomar la cuarta parte de ellas como se ha verificado en el ejemplo práctico.

Si el denominado del multiplicando se extiende hasta los adarmes, bastará para convertir estos en decimal de arroba tomar su *cuarta parte*, pero considerándolos como fraccion de onza, es decir, en un quebrado cuyo numerador será el número de adarmes que hubiere, y el denominador será 16, que son los adarmes que contiene la onza. En tal caso, tomando la *cuarta parte* de este quebrado, ella expresará una fraccion de centavo de arroba.

La razon de esto consiste en que, si para reducir las onzas á centavos de arroba basta tomar su cuarta parte, como se deja demostrado, tomando la cuarta parte de la fraccion ó quebrado de onza, la fraccion que resulte será por consecuencia relativa á *centavo de arroba.*

EJEMPLO.—7 qq. 3 @ 18 ℔ 14 oz. y 12 ads., á \$5 @, ¿qué importan?

En cuanto á los quintales que contiene este problema, como fácilmente se comprende, se deberán reducir á arrobas á fin de reunirlas con las que se citan en el mismo problema.

7 qq. 3 @ 18 ℔ 14 oz. 12 ads. á \$5.
4   4
28   31,72
3     $3\frac{2}{4}$ por la fraccion $\frac{2}{4}$ de cuarta parte de las onzas $= \frac{8}{16}$
31 @ $0\frac{3}{16}$ por los adarmes $= \frac{3}{16}$
$31{,}75\frac{11}{16}$ $\frac{11}{16}$
× \$5
158,75
\+ $3\frac{7}{16}$ ó $\frac{55}{16}$ de la multiplicacion del quebrado $\frac{11}{16}$ por \$5.
$158{,}78\frac{7}{16}$ valor pedido.